D13

Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

Herausgegeben von

K. Hensel

H. Hasse L. Schlesinger

Wissenschaftlicher Beirat

H. Brandt / M. Dehn / G. Doetsch / A. Fraenkel / O. Haupt / F. Hausdorff
E. Hellinger / G. Kowalewski / H. Rademacher / K. Reidemeister
A. Rosenthal / C. Schaefer / W. Schmeidler / F. Schottky / O. Toeplitz

Band 162

Heft 4

Ausgegeben am 31. Juli 1930

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung — J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung — Georg Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.

Berlin W 10 und Leipzig

1930

Jährlich 8 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band.

Band 162. Heft 4.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Schaaff, Wilhelm, Biegung mit Erhaltung zylindrischer konjugierter Systeme . . .	205
Emch, Arnold, Finite groups and their geometric representation	238
Bergmann, Stefan, Über die schlichten Bereiche in der Theorie der Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen	256

An unsere Mitarbeiter!

Es ist unbedingt notwendig, daß alle zur Einsendung gelangenden Manuskripte sowohl vollkommen druckfertig, als auch in gut lesbarer, möglichst Maschinen-Schrift gehalten sind, wobei die gotischen und griechischen wie überhaupt alle besonderen Typen durch Buntstift bezeichnet werden. Nachträgliche Korrekturen verursachen wesentliche Kosten, die sich naturgemäß auf die Preisgestaltung des Journals mit auswirken müssen. Machen sich also aus irgend einem Grunde Text-Änderungen eines Beitrages notwendig, so sind diese der Schriftleitung sofort mitzuteilen, wenn sie die endgültige Annahme und Weitergabe an den Verlag meldet; Korrekturen nach dem Vorliegen des Satzes dürfen sich ausschließlich auf die Verbesserung von Satzfehlern erstrecken.

Manuskripte, die den eingangs erwähnten Vorschriften entsprechen, ermöglichen auch der Schriftleitung eine raschere Prüfung als schwer leserliche und können infolgedessen schneller zum Druck gelangen.

Im Interesse des schnellen Erscheinens der einzelnen Hefte erhalten die Herren Verfasser grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge. Da seitens der Schriftleitung die Korrekturen in typographischer Hinsicht sorgfältige Lesung finden und die richtige Ausführung der Autor-Korrekturen genau überwacht wird, hoffen wir, auch so allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion ausschließlich unter der Adresse

An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik

Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg (Bez. Cassel), Behringweg 7.

Biegung mit Erhaltung zylindrischer konjugierter Systeme.

Von *Wilhelm Schaaff* in Mannheim-Feudenheim.

Inhalt.

Seite

Einleitung ... 205

Kapitel I: Gemeinsame Eigenschaften der Flächen, welche eine stetige Biegung mit Erhaltung eines konjugierten Systems gestatten ... 206

§ 1. Die Fundamentalrelation und ihre Deutung ... 206
§ 2. Die assoziierten Flächen $\overline{S}$ und S ... 208
§ 3. Zusammenhang zwischen den Biegungsflächen und ihren Assoziierten ... 209
§ 4. Die zugehörigen Strahlensysteme ... 211
§ 5. Die Abbildung nach parallelen Tangenten ... 213

Kapitel II: Die Flächen mit geodätischen Biegungskurven ... 214

§ 1. Die Flächen mit zwei Scharen geodätischer Biegungskurven ... 214
§ 2. Die Flächen mit einer Schar geodätischer Biegungskurven ... 215

Kapitel III: Die Flächen mit ebenen Biegungskurven ... 216

§ 1. Die Flächen mit einer Schar ebener Biegungskurven ... 216
§ 2. Die Flächen mit zwei Scharen ebener Biegungskurven ... 218
§ 3. Ausführung der Biegung der Affingesimsflächen ... 219
§ 4. Die zugehörigen Assoziierten ... 221

Kapitel IV: Die Flächen mit zylindrischen Biegungskurven ... 223

§ 1. Die Flächen mit einer Schar zylindrischer nichtisotroper Biegungskurven ... 223
§ 2. Die Flächen mit einer Schar isotroper Biegungskurven ... 227

Kapitel V: Flächen, welche unendlich wenig mit Erhaltung eines konjugierten Systems verbiegbar sind, oder nur eine einzige endliche Biegung mit Erhaltung eines konjugierten Systems gestatten ... 233

§ 1. Flächen, welche unendlich wenig mit Erhaltung eines konjugierten Systems verbiegbar sind ... 233
§ 2. Flächen, welche eine einzige endliche Biegung mit Erhaltung eines gegebenen konjugierten Systems gestatten ... 235

Einleitung.

Die Biegung von Flächen mit Erhaltung eines Systems konjugierter Kurven gehört zwar zu den viel bearbeiteten Fragen der Flächentheorie (Bianchi, Cosserat, Darboux, Guichard, Stäckel, Voß), doch sind Einzelheiten, vor allem nicht triviale Fälle, in denen die vollständige Behandlung möglich ist, bisher nur in kleinerem Umfang durchgeführt. Dies gelingt dem Verfasser bei der Forderung, daß die eine Schar des konjugierten Netzes zylindrisch sein, also Schattengrenzen bei Parallelbeleuchtung darstellen soll.

Wenn die zylindrische Schar isotrop ist, dann hängt die Bestimmung der Biegungen nur noch von der Ermittlung der Leitkurve der assoziierten Fläche (Regelfläche aus isotropen Geraden) aus Krümmung und Torsion ab.

Im allgemeinen Fall erhält man nur die Affingesimsflächen, d. h. die Flächen, bei denen die zylindrische Schar in Tangentialebenen eines Zylinders liegt, die andere in den dazu senkrechten Ebenen.

Auf die Affingesimsflächen führt auch jede der beiden Forderungen, daß die eine Schar des Biegungsnetzes eben sein soll, oder daß die Schmiegungsebenen der beiden Scharen konjugierter Kurven überall orthogonal sein sollen.

Nebenbei ergibt sich, daß die von Herrn *A. Schur* (Math. Zeitschrift **24** (1926), 530 ff.) hypothetisch im Anschluß an eine nicht ganz eindeutige, ja geradezu irreführende Äußerung von Darboux konstruierten Biegungsfälle viel weniger allgemein sind, als aus dem Wortlaut der Arbeit entnommen werden muß. Es bleiben gerade nur die Affingesimsflächen, die übrigens dort nicht genauer besprochen werden.

Kapitel I.

Gemeinsame Eigenschaften der Flächen, welche eine stetige Biegung mit Erhaltung eines konjugierten Systems gestatten.

§ 1. Die Fundamentalrelation und ihre Deutung.

Die Fundamentalgleichungen einer Fläche S in bezug auf ein konjugiertes System lauten:

$$L_v - \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} L + \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} N = 0; \quad K(EG - F^2) = LN; \quad N_u - \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} N + \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} L = 0.$$

Bei Biegung mit Erhaltung konjugierter Systeme bleibt $LN = \bar{L}\bar{N} = J$ invariant, $\bar{L}$ und $\bar{N}$ sind Lösungen derselben Codazzigleichungen:

$$\bar{L}_v - \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} \bar{L} + \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} \bar{N} = 0; \quad \bar{N}_u - \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} \bar{N} + \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} \bar{L} = 0.$$

Setzt man: $\bar{N} = J:\bar{L}$; $\bar{L}^2\bar{N}_u = \bar{L}J_u - J\bar{L}_u$; so folgt:

$$\bar{L}_v - \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} \bar{L} + \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} \frac{J}{\bar{L}} = 0; \quad \bar{L}_u = \left[\frac{J_u}{J} - \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\right] \bar{L} + \frac{\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}}{J} \bar{L}^3.$$

Diese Gleichungen sind nur dann verträglich, wenn: $\bar{L}_{uv} = \bar{L}_{vu}$ ist:

$$\begin{aligned}
&\bar{L}\left[\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}_u + \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\frac{J_u}{J} - \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\right] \\
&+ \frac{1}{\bar{L}}\left[-\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}_u J - \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} J_u + \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} J_u - J\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\right] + \frac{\bar{L}^3}{J}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} \\
&= \bar{L}\left[\frac{\partial^2 \lg J}{\partial u\,\partial v} - \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}_v + \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\frac{J_u}{J} - \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} - 3\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\right] \\
&+ \frac{1}{\bar{L}}\left[-\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} J_u + \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} J\right] + \bar{L}^3\left[\frac{1}{J}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}_v - \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\frac{J_v}{J^2} + \frac{3}{J}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\right].
\end{aligned}$$

Soll eine stetige Folge von Biegungen möglich sein, so müssen die Koeffizienten gleich hoher Potenzen von $\bar{L}$ gleich sein, also:

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned}
&\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}_v - \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\frac{J_v}{J} + 2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} = 0; \\
&\frac{\partial^2 \lg J}{\partial u\,\partial v} = \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}_u + 4\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}_v; \\
&\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}_u - \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\frac{J_u}{J} + 2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} = 0.
\end{aligned}$$

Da $L_{uv} = L_{vu}$, so folgt die mittlere Bedingung aus den beiden andern.

Für $\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} \neq 0$, $\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} \neq 0$ ergibt sich die einfachere Form:

$$\frac{\partial}{\partial v} \lg \frac{\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}}{J} + 2\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} = 0;$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u\, \partial v} \lg \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} = 8\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}; \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial u} \lg \frac{\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}}{J} + 2\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} = 0.$$

Bezeichnen wir kurz die konjugierten Kurven, die bei einer stetigen Aufeinanderfolge von Biegungen konjugiert bleiben, als Biegungskurven, ihr Netz als Biegungsnetz, so folgt:

Ein System konjugierter Kurven bildet dann und nur dann ein Biegungsnetz, wenn die Fundamentalrelation 1 *oder* 2 *erfüllt ist.*

Wir gelangen zu einer Deutung der Fundamentalrelation, wenn wir die $\left\{\begin{matrix}ik\\s\end{matrix}\right\}'$ des sphärischen Bildes einführen. Es ist:

$$\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} = -\frac{L}{N}\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}'; \quad \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} = -\frac{N}{L}\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}'; \quad \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} = -\frac{L}{N}\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}'; \quad \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} = -\frac{N}{L}\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}'. \tag{3}$$

Da sich die Codazzigleichungen in der Form:

$$\frac{L}{N}\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}' = \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}' - \frac{\partial \lg N}{\partial u}; \quad \frac{N}{L}\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}' = \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}' - \frac{\partial \lg L}{\partial v} \tag{4}$$

schreiben lassen, so zeigt eine leichte Umformung, daß die Fundamentalrelation mit der Forderung:

$$\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}_u' = 2\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}'\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}' = \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}_v' \tag{5}$$

äquivalent ist [1]). Es gilt somit:

$$\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}' = \varphi_v; \quad \varphi_{uv} = 2\varphi_u\varphi_v; \quad \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}' = \varphi_u.$$

Setzt man: $\varphi = -\frac{1}{2}\lg \psi$, so folgt: $-\frac{1}{2}(\psi\psi_{uv} - \psi_u\psi_v) = \frac{1}{2}\psi_u\psi_v$; also:

$$\psi_{uv} = 0; \quad \psi = U + V; \quad \varphi = -\frac{1}{2}\lg(U+V).$$

Die Differentialgleichung: $\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}_u' = \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}_v'$ besagt, daß die sphärischen Bildkurven des Biegungsnetzes auf S zugleich die sphärischen Bilder der Haupttangentenkurven einer Fläche $\bar{S}$ sind [2]). Ist das Krümmungsmaß von $\bar{S}$ in bezug auf die Haupttangentenkurven:

$\bar{K} = -\frac{1}{\varrho^2}$, so ist $\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}' = -\frac{1}{2}\frac{\partial \lg \varrho}{\partial v}$; $\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}' = -\frac{1}{2}\frac{\partial \lg \varrho}{\partial u}$; also wegen: $\varrho = U + V$:

$$\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}' = -\frac{1}{2}\frac{\partial \lg(U+V)}{\partial v}; \quad \bar{K} = -\frac{1}{(U+V)^2}; \quad \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}' = -\frac{1}{2}\frac{\partial \lg(U+V)}{\partial u}. \tag{6}$$

---

[1]) *M. E. Cosserat*, Sur les systèmes conjugés et sur la déformation des surfaces, Comptes Rendus **113** (1891), S. 460—63. Vgl. auch 4.

[2]) *U. Dini*, Sopra alcune formole generali ..., Annali di Matematica (2) **4** (1869), S. 183.

Nennen wir die Flächen $\overline{S}$, deren Krümmungsmaß bezogen auf die Haupttangentenkurven die Form: $\overline{K} = -\frac{1}{(U+V)^2}$ hat, nach ihrem Entdecker [3]) kurz Bianchische Flächen, so gilt:

Eine Fläche S läßt sich dann und nur dann stetig so verbiegen, daß ein konjugiertes System konjugiert bleibt, wenn das sphärische Bild des konjugierten Systems zugleich das sphärische Bild der Haupttangentenkurven einer Bianchischen Fläche $\overline{S}$ ist [4]).

Die Flächen S und $\overline{S}$ heißen assoziiert.

§ 2. Die assoziierten Flächen S und $\overline{S}$.

Die Flächen $\overline{S}$, welche die sphärischen Kurven u, v als Bild ihrer Haupttangentenkurven haben, erfüllen die Gleichungen:

$$(1)\quad \frac{\partial \lg \varrho}{\partial u} = -2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}'; \quad \frac{\partial \lg \varrho}{\partial v} = -2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}', \text{ wobei: } \varrho = \frac{\overline{M}}{\sqrt{eg-f^2}} \text{ und: } \overline{K} = -\frac{1}{\varrho^2},$$

Die sphärischen Kurven sind also nur dann Bilder von Haupttangentenkurven, wenn $\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}'_u = \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}'_v$ ist [5]). Ist diese Bedingung erfüllt, und sind die Richtungskosinus der Normalen bekannt, dann ergeben sich die Flächen $\overline{S}$ durch Quadraturen:

$$(2)\quad \overline{x}_u = \frac{\varrho}{\sqrt{eg-f^2}}(f X_u - e X_v); \quad \overline{x}_v = \frac{\varrho}{\sqrt{eg-f^2}}(-g X_u + f X_v)\ [6]).$$

Kennt man die Richtungskosinus der Normalen nicht, so ist zu ihrer Bestimmung die Integration einer Riccatischen Differentialgleichung erforderlich.

Die Flächen S, welche die sphärischen Kurven u, v als Bilder eines konjugierten Systems haben, erfüllen die Gleichungen:

$$(3)\quad L_v = \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}' L - \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}' N; \quad N_u = \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}' N - \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}' L.$$

Sind L und N Lösungen dieses Systems, und sind die Richtungskosinus der Normalen bekannt, so erhält man die Flächen S durch Quadraturen:

$$(4)\quad x_u = \frac{L}{eg-f^2}(-g X_u + f X_v); \quad x_v = \frac{N}{eg-f^2}(f X_u - e X_v)\ [7]).$$

Zwischen zwei assoziierten Flächen S und $\overline{S}$ bestehen also die Beziehungen:

$$(5)\quad \overline{x}_u = \frac{\varrho\sqrt{eg-f^2}}{N} x_v; \quad \overline{x}_v = \frac{\varrho\sqrt{eg-f^2}}{L} x_u;$$

Die Assoziierte $\overline{S}$ von S ergibt sich durch Quadraturen, die Rückassoziierte S von $\overline{S}$ ebenfalls, sobald man Lösungen L, N des Systems 3 kennt.

Die Bestimmung aller Bianchischen Flächen, der Assoziierten der Flächen mit Biegungsnetz, erfordert die Integration einer partiellen Differentialgleichung vierter Ordnung. Da nämlich:

---

[3]) *L. Bianchi*, Sopra alcune nuove classi di superficie ....., Annali di Matematica (2) 18 (1890), S. 330—340.

[4]) *L. Bianchi*, Differentialgeometrie, deutsch von Lukat, B. G. Teubner, Berlin u. Leipzig, 2. Auflage (1910), S. 342—44.

[5]) Vgl. 2.

[6]) *L. Bianchi*, Differentialgeometrie, S. 126.

[7]) *L. Bianchi*, Differentialgeometrie, S. 134.

(6) $$e_v = 2e\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}' + 2f\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}'; \quad g_u = 2g\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}' + 2f\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}',$$

so ist: $$e_v + e\frac{V'}{U+V} + f\frac{U'}{U+V} = 0; \quad g_u + g\frac{U'}{U+V} + f\frac{V'}{U+V} = 0,$$

oder: $$[e(U+V)]_v = -fU'; \quad [g(U+V)]_u = -fV'.$$

Setzt man $f = -\Omega_{uv}$, so folgt durch Integration:

$$e(U+V) = \Omega_u U' + U^*; \quad g(U+V) = \Omega_v V' + V^*.$$

Das Bogenelement des sphärischen Bildes lautet somit:

(7) $$d\sigma^2 = \frac{\Omega_u U' + U^*}{U+V}du^2 - \Omega_{uv}\,du\,dv + \frac{\Omega_v V' + V^*}{U+V}dv^2.$$

Da die Krümmung der Form $d\sigma^2$ den Wert $+1$ haben muß, so ergibt sich für Ω eine partielle Differentialgleichung vierter Ordnung. Ist Ω eine Lösung, dann ist:

$$\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}' = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\lg(U+V); \quad \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}' = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\lg(U+V);$$

und es existiert eine Fläche $\overline{S}$ mit dem Krümmungsmaß: $\overline{K} = -\frac{1}{(U+V)^2}$ und den Fundamentalgrößen:

(8) $$\overline{E} = (U+V)(\Omega_u U' + U^*); \quad \overline{F} = (U+V)^2\,\Omega_{uv}; \quad \overline{G} = (U+V)(\Omega_v V' + V^*);$$
$$\overline{L} = 0; \quad \overline{M}^2 = (\Omega_u U' + U^*)(\Omega_v V' + V^*) - \Omega_{uv}^2(U+V)^2; \quad \overline{N} = 0.$$

Für die Fundamentalgrößen E, F, G der Rückassoziierten S folgt nach 5:

(9) $$E = \frac{L^2}{(U+V)^2(eg-f^2)}\overline{G}; \quad F = \frac{LN}{(U+V)^2(eg-f^2)}\overline{F};$$
$$G = \frac{N^2}{(U+V)^2(eg-f^2)}\overline{E},$$

wobei L und N Lösungen des Systems 3 sind. Stellt K das Krümmungsmaß von S dar, so folgt aus 9:

(10) $$KF = -f = \Omega_{uv}; \qquad \text{also:}$$

Ist eine Fläche S mit Erhaltung eines konjugierten Systems verbiegbar, so bleibt bei Biegung f invariant, und die Werte $\overline{\Omega}$ der Assoziierten der Biegungsflächen erfüllen die Beziehung:

$$\overline{\Omega}_{uv} = \Omega_{uv}.$$

§ 3. Zusammenhang zwischen den Biegungsflächen und ihren Assoziierten.

Da $\overline{L}\overline{N} = LN$ biegungsinvariant sein soll, so gilt: $\overline{L} = \lambda L$; $\overline{N} = \frac{N}{\lambda}$. Setzt man $\lambda^2 = 1 + \frac{1}{v}$, so lauten die Codazzigleichungen:

(1) $$\frac{\partial}{\partial u}\lg(v+1) = 2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}'; \quad \frac{\partial}{\partial v}\lg v = 2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}'.$$

Da dieses System nicht mehr als eine Lösung haben kann, sofern es nicht unbeschränkt integrierbar ist, so gilt:

Gestattet eine Fläche mehr als eine Verbiegung, bei der ein konjugiertes System konjugiert bleibt, so gestattet sie eine stetige Folge solcher Verbiegungen [8]). Speziell für Biegungsnetze folgt:

[8]) Vgl. 4.

$$(2)\quad \frac{\partial}{\partial u}\lg(v+1)+\frac{\partial}{\partial u}\lg(U+V)=0;\quad \frac{\partial}{\partial v}\lg v+\frac{\partial}{\partial v}\lg(U+V)=0;$$

integriert: $(v+1)(U+V)=V^*$; $v(U+V)=U^*$; wegen: $U^*+U+V=V^*$ folgt: $U^*=c-U$; $V^*=c+V$, somit:

$$\lambda^2=\frac{v+1}{v}=\frac{c+V}{c-U};$$ und:

$$(3)\qquad \overline{L}=L\sqrt{\frac{c+V}{c-U}};\quad \frac{\overline{L}}{\overline{N}}=\frac{L}{N}\frac{c+V}{c-U};\quad \overline{N}=N\sqrt{\frac{c-U}{c+V}}.$$

Die Biegungen mit Erhaltung konjugierter Systeme hängen also nur von einer willkürlichen Konstanten c ab. Ferner: Lassen sich auf der Ausgangsfläche die Haupttangentenkurven durch Quadraturen bestimmen, so gilt dies auch für jede Biegungsfläche.

Da bei Biegung die Größen:

$$\left\{\overline{12}\atop 1\right\}'\frac{\overline{L}}{\overline{N}}=\left\{12\atop 1\right\}'\frac{L}{N}=-\left\{11\atop 2\right\};\quad \left\{\overline{12}\atop 2\right\}'\frac{\overline{N}}{\overline{L}}=\left\{12\atop 2\right\}'\frac{N}{L}=-\left\{22\atop 1\right\}$$

ungeändert bleiben, so folgt wegen 3:

$$(4)\qquad \frac{\overline{V}'}{\overline{U}+\overline{V}}\frac{c+V}{c-U}=\frac{V'}{U+V};\quad \frac{\overline{U}'}{\overline{U}+\overline{V}}\frac{c-U}{c+V}=\frac{U'}{U+V}.$$

Durch Division folgt: $\frac{\overline{U}'}{\overline{V}'}\frac{(c-U)^2}{(c+V)^2}=\frac{U'}{V'}$, also:

$$\overline{U}'=k\frac{U'}{(c-U)^2}=k\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{(c-U)}\right);\qquad \overline{V}'=k\frac{V'}{(c+V)^2}=-k\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{c+V}\right);$$

integriert: $\overline{U}=\frac{k}{c-U}+k_1;\quad \overline{V}=-\frac{k}{c+V}+k_2.$

Da: $(c-U)(c+V)(\overline{U}+\overline{V})=k(U+V)+(k_1+k_2)(c-U)(c+V)$, so folgt:

$$\frac{\overline{U}'}{\overline{U}+\overline{V}}\frac{c-U}{c+V}=\frac{U'}{U+V+\frac{k_1+k_2}{k}(c-U)(c+V)}=\frac{U'}{U+V};$$

$$\frac{\overline{V}'}{\overline{U}+\overline{V}}\frac{c+V}{c-U}=\frac{V'}{U+V+\frac{k_1+k_2}{k}(c-U)(c+V)}=\frac{V'}{U+V};$$

es muß also: $k_1+k_2=0$ sein.

Für die Assoziierten der Biegungsflächen gilt somit:

$$\overline{U}=\frac{k}{c-U}+c_1;\quad \overline{U}+\overline{V}=k\frac{U+V}{(c-U)(c+V)};\quad \overline{V}=-\frac{k}{c+V}-c_1.$$

Da sich für $c\to\infty$ die Ausgangsfläche ergeben muß, also: $\overline{U}+\overline{V}=U+V$ sein muß, so folgt: $k=c^2$ und:

$$(5)\quad \overline{U}=\frac{c^2}{c-U}+c_1;\quad \overline{U}+\overline{V}=\frac{c^2(U+V)}{(c-U)(c+V)};\quad \overline{V}=-\frac{c^2}{c+V}-c_1.$$

Schreibt man die Codazzigleichungen in der Form:

$$\frac{\partial\lg L}{\partial v}=\left\{12\atop 1\right\}+\left\{12\atop 1\right\}';\qquad \frac{\partial\lg N}{\partial u}=\left\{12\atop 2\right\}+\left\{12\atop 2\right\}'$$

und setzt man: $\left\{12\atop 1\right\}=\frac{\partial\lg\varphi}{\partial v};\ \left\{12\atop 2\right\}=\frac{\partial\lg\psi}{\partial u}$, so folgt:

$$\frac{\partial \lg L}{\partial v} = \frac{\partial \lg \varphi}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial v} \lg \sqrt{U+V}; \quad \frac{\partial \lg N}{\partial u} = \frac{\partial \lg \psi}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial u} \lg \sqrt{U+V};$$

integriert: $L = \frac{U^* \varphi}{\sqrt{U+V}}$; $N = \frac{V^* \psi}{\sqrt{U+V}}$; somit gilt:

Auf Biegungsnetzen mit gleichen Invarianten ($\varphi = \psi$) ergeben sich die Haupttangentenkurven durch Quadraturen. Umgekehrt gilt: Läßt sich ein Biegungsnetz durch Eichung der Parameter auf die isotherm-konjugierte Form bringen, so hat es gleiche Invarianten.

Für die Normalkrümmungen und geodätischen Torsionen der Parameterkurven gelten die Formeln:

$$\frac{1}{R_u} = \frac{N}{G}; \quad \frac{1}{R_v} = \frac{L}{E}; \quad \frac{1}{T_u} = -\frac{FN}{GD}; \quad \frac{1}{T_v} = \frac{FL}{ED}.$$

Für die Biegungsflächen gilt daher:

$$(6) \quad \frac{1}{\overline{R}_u} = \frac{1}{R_u}\sqrt{\frac{c-U}{c+V}}; \quad \frac{1}{\overline{R}_v} = \frac{1}{R_v}\sqrt{\frac{c+V}{c-U}}; \quad \frac{1}{\overline{T}_u} = \frac{1}{T_u}\sqrt{\frac{c-U}{c+V}}; \quad \frac{1}{\overline{T}_v} = \frac{1}{T_v}\sqrt{\frac{c+V}{c-U}}.$$

Bei Biegung multipliziert sich die Normalkrümmung und geodätische Torsion der Parameterkurven $u = const.$ mit dem Faktor: $\sqrt{\frac{c-U}{c+V}}$, *die der Parameterkurven $v = const.$ mit dem Faktor:* $\sqrt{\frac{c+V}{c-U}}$. *Die Größen:*

$$(7) \quad \left|\frac{T_u}{R_u}\right| = \left|\frac{T_v}{R_v}\right| = \frac{D}{F} = tg\,\alpha; \quad (\alpha = \textit{Winkel der Parameterkurven})$$

bleiben daher bei Biegung mit Erhaltung konjugierter Systeme invariant.

§ 4. Die zugehörigen Strahlensysteme.

Sind die sphärischen Kurven Bild eines konjugierten Systems der Enveloppe S der Ebenen: $\Sigma x X = W$, so genügen die Ebenenkoordinaten: X, Y, Z, W ein- und derselben Laplacegleichung:

$$(1) \quad \vartheta_{uv} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}' \vartheta_u + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}' \vartheta_v - f\vartheta.$$

Jede von X, Y, Z linear unabhängige Lösung W liefert eine Fläche S. Die Laplacegleichung 1 ist die adjungierte der Gleichung:

$$(2) \quad \varrho_{uv} + \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}' \varrho_u + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}' \varrho_v + \left[\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}_u' + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}_v' + f\right] \varrho = 0,$$

von der die Bestimmung derjenigen Strahlensysteme abhängt, welche die sphärischen Kurven als Bild ihrer Torsen haben[9]). Ist $\overline{\vartheta}$ Lösung von 1, so ist es auch $c\overline{\vartheta}$, und die ∞^3 Normalebenen der Systemstrahlen umhüllen ∞^1 Flächen $S(c\overline{\vartheta})$, so daß den Torsen des Systems auf den Flächen S konjugierte Systeme entsprechen, die mit den Torsen das sphärische Bild gemein haben. Sind die sphärischen Kurven Bild der Haupttangentenkurven einer Fläche $\overline{S}$, so sind die Strahlensysteme Ribaucoursche Strahlensysteme, und die Flächen $\overline{S}$ sind die Assoziierten von S. Sind insbesondere die Flächen $\overline{S}$ Bianchische Flächen, so gestatten die Enveloppen S eine Biegung mit Erhaltung des konjugierten Systems. Die zugehörigen Laplacegleichungen sind:

---

[9]) *L. Bianchi*, Differentialgeometrie, S. 282.

$$(3) \qquad \vartheta_{uv} + \frac{\partial}{\partial v} \lg \sqrt{U+V} \cdot \vartheta_u + \frac{\partial}{\partial u} \lg \sqrt{U+V} \cdot \vartheta_v + f\vartheta = 0.$$

$$(4) \qquad \varrho_{uv} + \frac{\partial}{\partial v} \lg \frac{1}{\sqrt{U+V}} \cdot \varrho_u + \frac{\partial}{\partial u} \lg \frac{1}{\sqrt{U+V}} \cdot \varrho_v + \left[f + \frac{U'V'}{(U+V)^2} \right] \varrho = 0.$$

Diese Gleichungen lassen sich vermöge der Substitutionen:
$\vartheta\sqrt{U+V} = \varphi$; $\varrho = \psi\sqrt{U+V}$ auf die Moutardsche Form bringen:

$$(5) \qquad \varphi_{uv} = \left(-\frac{1}{4} \frac{U'V'}{(U+V)^2} - f \right) \varphi;$$

$$(6) \qquad \psi_{uv} = \left(-\frac{1}{4} \frac{U'V'}{(U+V)^2} - f \right) \psi.$$

Da also φ und ψ derselben Moutardschen Gleichung genügen, so folgt: Ist ϑ Lösung von 3, so ist $(U+V)\vartheta$ Lösung von 4, ist ϱ Lösung von 4, so ist $\varrho : (U+V)$ Lösung von 3.

Die Strahlensysteme, deren Torsen dasselbe sphärische Bild wie die Haupttangentenkurven einer Bianchischen Fläche haben, welche also der Bedingung: $\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}'_u = 2 \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}' \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}' = \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}'_v$ genügen, sind identisch mit den unendlich-zyklischen Strahlensystemen, welche auf unendlich viele Arten als Achsenkongruenz normaler Kreissysteme betrachtet werden können [10]). Da nach Ribaucour den Torsen des Achsensystems auf der Enveloppe der Kreisebenen eines jeden normalen Kreissystems ein konjugiertes System entspricht, so gilt:

Die Rückassoziierten der Bianchischen Flächen, also die Flächen, welche eine stetige Biegung mit Erhaltung eines konjugierten Systems gestatten, sind identisch mit den Enveloppen der Kreisebenen der normalen Kreissysteme, deren Achsen unendlich-zyklisch sind [11]). Gestattet das konjugierte System eine und nur eine Biegung, bei der es konjugiert bleibt, so hat das System § 3, 1 und folglich auch das System:

$$(7) \qquad \frac{\partial}{\partial u} \cos\sigma = 2(\cos\sigma - 1) \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}'; \quad \frac{\partial}{\partial v} \cos\sigma = 2(\cos\sigma + 1) \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}',$$

das durch die Substitution: $\cos\sigma + 1 = -2\nu$ daraus hervorgeht, eine und nur eine Lösung. Da 7 für $\cos\sigma$ die Beziehung:

$$(8) \qquad \left[\begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}'_v - \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}'_u \right] \cos\sigma = \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}'_u - 4 \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}' \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}' + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}'_v$$

liefert, so folgt: Eine Fläche S läßt sich dann und nur dann auf eine einzige Weise so verbiegen, daß ein konjugiertes System konjugiert bleibt, wenn der Wert 8 für $\cos\sigma$ dem System 7 genügt [11]). Aus 7 folgt ferner für die zugehörigen Strahlensysteme:

Gestattet ein konjugiertes System eine und nur eine endliche Biegung, bei der es konjugiert bleibt, so sind die Strahlensysteme, welche das sphärische Bild des konjugierten Systems als Bild ihrer Torsen haben, zyklisch [12]). Da $\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}'_u = \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}'_v$ die Bedingung für Ribaucoursche Strahlensysteme ist, so folgt:

Ist ein Ribaucoursches Strahlensystem zyklisch, so ist es unendlich-zyklisch. Da die Bedingung für zyklische Strahlensysteme nur vom sphärischen Bild der Torsen

---

[10]) *L. Bianchi*, Sopra alcune nuove classi di superficie ..., Annali di Matematica, (2) **18** (1890), S. 314—30.

[11]) *L. Bianchi*, Differentialgeometrie, S. 354—56. Vgl. auch 1.

[12]) Vgl. 1.

abhängt, so sind alle Strahlensysteme, die mit einem zyklischen das sphärische Bild der Torsen gemein haben, gleichfalls zyklisch. Daraus folgt:

Gestattet eine Fläche eine einzige Biegung mit Erhaltung der Krümmungslinien, so bilden ihre Normalen ein zyklisches Strahlensystem. Die Normalen der Flächen, die eine stetige Folge von Biegungen mit Erhaltung der Krümmungslinien gestatten, bilden ein unendlich-zyklisches Strahlensystem [12]).

Ist ϱ eine Lösung von 4, so stellen die Gleichungen:

$$(9)\quad x_u = \left(\varrho_u - \frac{U'}{U+V}\varrho\right)X - \varrho X_u; \quad x_v = -\left(\varrho_v - \frac{U'}{U+V}\varrho\right)X + \varrho X_v,$$

(wobei die X die Richtungscosinus der Strahlen bedeuten), die Mittelfläche eines unendlich-zyklischen Strahlensystems dar. Ist $\delta = \varrho\cos\sigma$ die Entfernung des Kreismittelpunkts x_1 vom Strahlenmittelpunkt x und $R = \varrho\sin\sigma$ der Radius des Kreises, so ergibt sich für σ das integrable System [13]):

$$(10)\quad \frac{\partial}{\partial u}\cos\sigma = -(\cos\sigma - 1)\frac{U'}{U+V}; \quad \frac{\partial}{\partial v}\cos\sigma = -(\cos\sigma + 1)\frac{V'}{U+V};$$

integriert: $(\cos\sigma - 1)(U+V) = V^*$; $(\cos\sigma + 1)(U+V) = U^*$.
Da $V^* + 2U + 2V = U^*$, so folgt: $U^* = 2U + 2k$; $V^* = -2V + 2k$; also gilt:

$$(11)\qquad \operatorname{tang}\frac{\sigma}{2} = \sqrt{\frac{V-k}{U+k}}; \quad \cos\sigma = \frac{U - V + 2k}{U+V}.$$

Da den Torsen des Strahlensystems auf der Enveloppe der Kreisebenen ein konjugiertes System entspricht, so ist der Abstand ϑ der Hüllebenen vom Koordinatenanfang:

$$(12)\qquad \vartheta = \Sigma x X + \varrho\frac{U - V + C}{U+V} \text{ Lösung von } 3\ [13]).$$

§ 5. Die Abbildung nach parallelen Tangenten.

Die Abbildung nach parallelen Tangenten [14]) an die Parameterkurven ist nur möglich, wenn das System konjugiert ist, denn aus: $\bar{\mathfrak{x}}_u = P\mathfrak{x}_u$; $\bar{\mathfrak{x}}_v = Q\mathfrak{x}_v$ folgt wegen: $\bar{\mathfrak{x}}_{uv} = \bar{\mathfrak{x}}_{vu}$:

$$\mathfrak{x}_{uv} = -\frac{P_v}{P-Q}\mathfrak{x}_u + \frac{Q_u}{P-Q}\mathfrak{x}_v.$$

Da: $\overline{D}\overline{M} = (\bar{\mathfrak{x}}_{uv}\bar{\mathfrak{x}}_u\bar{\mathfrak{x}}_v) = P^2Q(\mathfrak{x}_{uv}\mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v) = P^2QDM$, so gilt:

Die Abbildung nach parallelen Tangenten führt konjugierte Systeme in konjugierte Systeme über. Da die Bedingung 6 des § 1 für Biegungsnetze nur vom sphärischen Bild abhängt, und da die Abbildung nach parallelen Tangenten eine spezielle Abbildung nach parallelen Normalen ist, so führt sie Biegungsnetze in Biegungsnetze über. Da ferner:

$$\overline{E} = P^2E; \qquad \overline{F} = PQF; \qquad \overline{G} = Q^2G,$$

so führt die Abbildung nach parallelen Tangenten Flächenpaare, die mit Erhaltung eines konjugierten Systems aufeinander verbiegbar sind, in ebensolche Flächenpaare über, insbesondere führt sie Biegungsgruppen mit Erhaltung konjugierter Systeme in ebensolche über. Bei Abbildung nach parallelen Tangenten gehen konjugierte Systeme, deren Schmiegebenen orthogonal, deren Kurven eben oder geodätisch sind, in ebensolche über, denn es gilt:

---

[13]) Vgl. 11.

[14]) *Peterson*, Über Kurven und Flächen, Moskau und Leipzig, § 22. Vgl. auch *P. Stäckel*, Biegungen und konjugierte Systeme, Mathematische Annalen **49** (1896), S. 255—260.

1. $(\bar{\mathfrak{x}}_{uu} \times \bar{\mathfrak{x}}_u)(\bar{\mathfrak{x}}_{vv} \times \bar{\mathfrak{x}}_v) = P^2 Q (\mathfrak{x}_{uu} \times \mathfrak{x}_u)(\mathfrak{x}_{vv} \times \mathfrak{x}_v)$;
2. $(\bar{\mathfrak{x}}_{uuu}\, \bar{\mathfrak{x}}_{uu}\, \bar{\mathfrak{x}}_u) = P^3 (\mathfrak{x}_{uuu}\, \mathfrak{x}_{uu}\, \mathfrak{x}_u)$;
3. $(\bar{\mathfrak{X}}\, \bar{\mathfrak{x}}_{uu} \bar{\mathfrak{x}}_u) = P^3 Q \dfrac{D}{\overline{D}} (\mathfrak{X}\, \mathfrak{x}_{uu}\, \mathfrak{x}_u)$.

Minimalkurven bleiben bei Abbildung nach parallelen Tangenten erhalten.

Kapitel II.

Die Flächen mit geodätischen Biegungskurven.

§ 1. Die Flächen mit zwei Scharen geodätischer Biegungskurven.

Die Fundamentalrelation I, § 1, 1 ist identisch erfüllt, wenn die konjugierten Kurven geodätisch sind, wenn:

(1) $$\begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} = 0; \quad \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0$$ ist. Somit gilt:

Flächen mit einem konjugierten System geodätischer Kurven lassen sich mit Erhaltung dieses Systems verbiegen. Sie werden Voßflächen [15]) genannt. Bei der Biegung ändern sich nach I, § 3, 3 die Fundamentalgrößen L und N nur um konstante Faktoren.

(2) $$\overline{L} = cL; \quad \overline{N} = \frac{1}{c} N.$$

Da für geodätische Linien die geodätische Torsion mit der gewöhnlichen Torsion $\frac{1}{\tau}$, die Normalkrümmung mit der gewöhnlichen Krümmung $\frac{1}{\varrho}$ zusammenfällt, so gilt nach I, § 3, 9:

Bei Biegungen, welche geodätisch konjugierte Systeme in ebensolche überführen, multiplizieren sich Krümmung und Torsion der einen Schar von Parameterkurven mit demselben Faktor c, die der anderen Schar mit dem reziproken Faktor $\frac{1}{c}$, und es sind die Größen:

(3) $$\left|\frac{\tau_1}{\varrho_1}\right| = \left|\frac{\tau_2}{\varrho_2}\right| = \frac{D}{F} = \operatorname{tang} \alpha; \quad \frac{1}{\tau_1 \cdot \tau_2}; \quad \frac{1}{\varrho_1 \cdot \varrho_2}$$

Invarianten dieser Biegungen [16]). Wegen 1 gilt nach I, § 1, 4:

(4) $$\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}' = 0; \quad \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}' = 0;$$ also wegen I, § 1, 7:

$$U' = 0; \quad V' = 0; \quad U = c_1; \quad V = c_2; \quad \text{also} \quad \overline{K} = -\frac{1}{(c_1 + c_2)^2};$$ d. h.:

Die Voßflächen sind die Rückassoziierten der pseudosphärischen Flächen [17]). Die pseudosphärischen Flächen $U = c_1$, $V = c_2$ ergeben sich aus den Bianchischen Flächen durch die Forderung, daß die beiden Scharen von Haupttangentenkurven konstante Torsion haben sollen. Für das Bogenelement der pseudosphärischen Flächen erhält man bei geeigneter Parameterwahl die bekannte Form:

(5) $$ds^2 = du^2 + 2\overline{F}\, du\, dv + dv^2.$$

Da die Krümmung dieser Form den Wert -1 haben muß, so ergibt sich für $\overline{F}$ die

---

[15]) *A. Voß*, Über die Flächen, auf denen zwei Scharen geodätischer Linien ein konjugiertes System bilden, Münchner Sitzungsberichte 1888, S. 95—102.

[16]) *B. Gambier*, Surfaces de Voß et Guichard ..., Acta Mathematica 51 (1928), S. 92. Vgl. auch 4.

[17]) *L. Bianchi*, Differentialgeometrie, S. 290—91.

partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung: $-\sqrt{1-\overline{F}^2} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\overline{F}_u}{\sqrt{1-\overline{F}^2}}\right)$, die für $\overline{F} = \cos\varphi$ die Form:

$$\varphi_{uv} = \sin\varphi \tag{6}$$

annimmt.

Die zugehörigen unendlich-zyklischen Strahlensysteme sind die, welche zum sphärischen Bild der Torsen das der Haupttangentenkurven einer pseudosphärischen Fläche haben. Nach I, § 4, 3, 4 sind die Ebenenkoordinaten X, Y, Z, W und auch ϱ Lösungen von:

$$\psi_{uv} = \psi\cos\varphi, \text{ wobei } \varphi \text{ Lösung von 6 ist.} \tag{7}$$

Diese Strahlensysteme werden Guichardsysteme [18]) genannt. Wegen 4 gilt für die konjugierten Systeme, in denen die Guichardstrahlen ihre Brennflächen G_1 und G_2 berühren:

$$F_1 = 0;\ F_2 = 0;\ \text{d. h.:} \tag{8}$$

Die Guichardstrahlen berühren ihre Brennflächen in Krümmungslinien. Die Flächen G_1 und G_2 heißen Guichardflächen [18]). Nach I, § 4, 12 umhüllen die Normalebenen:

$$\vartheta = \Sigma xX + \varrho\frac{c_1 - c_2 + c}{c_1 + c_2} \tag{9}$$

der Guichardstrahlen Voßflächen. Für $c = 2c_2$, $c = -2c_1$ folgt:

$$\vartheta = \Sigma xX \pm \varrho, \tag{10}$$

woraus folgt:

Die Evolutenflächen der Guichardflächen sind Voßflächen [19]). Für $c = -(c_1 - c_2)$ folgt wegen $\vartheta = \Sigma xX$:

Die Mittelenveloppe eines Guichardsystems ist Voßfläche [20]). Die Voßflächen gehen nach I, § 5, 3 bei Abbildung nach parallelen Tangenten wieder in Voßflächen über. Dasselbe gilt für Guichardflächen, denn jedes Strahlensystem parallel zu einem Guichardsystem ist wieder ein Guichardsystem, und seine Brennflächen sind daher wieder Guichardflächen [21]).

§ 2. Die Flächen mit einer Schar geodätischer Biegungskurven.

Die Flächen $\overline{V}$ mit einer Schar geodätischer Biegungskurven besitzen ganz ähnliche Eigenschaften wie die Voßflächen. Sind die Kurven $v = \text{const.}$ geodätisch, so folgt wegen: $\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} = 0$:

$$\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}' = 0;\quad V' = 0;\quad V = \bar{c};\quad \overline{K} = -\frac{1}{(U+\bar{c})^2};\ \text{d. h.:} \tag{1}$$

Die Flächen mit einer Schar geodätischer Biegungskurven sind die Assoziierten der Bianchischen Flächen: $\overline{K} = -\frac{1}{(U+\bar{c})^2}$, *die dadurch charakterisiert sind, daß die Haupt-*

---

[18]) *G. Guichard*, Surfaces rapportées à leurs lignes asymptotiques et congruences rapportées à leurs développables, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure (3) **6** (1889), S. 346—48.

[19]) *G. Guichard*, Recherches sur les surfaces à courbure totale constante et sur certaines surfaces, qui s'y rattachent, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure (3) **7** (1890), S. 233—64.

[20]) Vgl. 11.

[21]) *G. Guichard*, Sur les réseaux conjugés, dont les courbes d'un système sont des géodésiques, Comptes Rendus **128** (1899), S. 599—601.

tangentenkurven $u = const.$ konstante Torsion besitzen [22]). Für das Bogenelement dieser Flächen folgt nach I, § 2, 8:

$$(2) \quad ds^2 = (U + \bar{c})\,(\Omega_u\, U' + V^*)\,du^2 + (U + \bar{c})^2\,\Omega_{uv}\,du\,dv + (U + \bar{c})\,V^*\,dv^2.$$

Die partielle Differentialgleichung vierter Ordnung für Ω reduziert sich auf eine partielle Differentialgleichung dritter Ordnung für Ω_u [22]).

Für die Fundamentalgrößen $\overline{L}$ und $\overline{N}$ der Biegungsflächen der Flächen $\overline{V}$ folgt nach I, § 3, 3:

$$(3) \qquad \overline{L} = L\sqrt{\frac{c + \bar{c}}{c - U}}; \quad \overline{N} = N\sqrt{\frac{c - U}{c + \bar{c}}}.$$

Nach I, § 3, 9 gilt:

Bei Biegung mit Erhaltung des konjugierten Systems mit einer Schar geodätischer Kurven multiplizieren sich die Normalkrümmungen und geodätischen Torsionen der Kurven $u = k$ mit den konstanten Faktoren: $\sqrt{\frac{c - U(k)}{c + \bar{c}}}$, die Krümmungen $\frac{1}{\varrho_v}$ und Torsionen $\frac{1}{\tau_v}$ der geodätischen Kurven $v = const.$ mit demselben Faktor: $\sqrt{\frac{c + \bar{c}}{c - U}}$; die Größe: $\frac{\tau_v}{\varrho_v}$ ist biegungsinvariant.

Die Größen $X\sqrt{U + \bar{c}}$, $Y\sqrt{U + \bar{c}}$, $Z\sqrt{U + \bar{c}}$, $\varrho{:}\sqrt{U + \bar{c}}$, der zugehörigen unendlich-zyklischen Strahlensysteme $\overline{C}$ erfüllen nach I, § 4, 5, 6 die Laplacegleichung:

$$(4) \qquad \psi_{uv} + f\,\psi = 0.$$

Ist $f = -\Omega_{uv}$, so genügt Ω_u der obigen partiellen Differentialgleichung dritter Ordnung. Wegen $\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}' = 0$ ist für die eine Brennfläche: $F_1 = 0$, d. h.:

Die $\overline{C}$-Strahlensysteme berühren die eine Brennfläche $\overline{G}$ in Krümmungslinien [23]). Nach I, § 4, 10 umhüllen die Normalebenen der $\overline{C}$-Strahlen, die vom Koordinatenanfang den Abstand:

$$(5) \qquad \vartheta = \Sigma x X + \varrho\,\frac{U - \bar{c} + c}{U + \bar{c}}$$

haben, Flächen, welche sich mit Erhaltung eines konjugierten Systems mit einer Schar geodätischer Kurven verbiegen lassen. Für $c = 2\bar{c}$ folgt: $\vartheta = \Sigma x X + \varrho$; somit gilt:

Ein Evolutenmantel der Brennfläche $\overline{G}$ eines $\overline{C}$-Systems, welche von den $\overline{C}$-Strahlen längs Krümmungslinien berührt wird, ist $\overline{V}$-Fläche [23]). Die $\overline{V}$-Flächen gehen bei Abbildung nach parallelen Tangenten wieder in $\overline{V}$-Flächen über, ebenso die Flächen $\overline{G}$, denn jedes Strahlensystem parallel zu einem $\overline{C}$-System ist wieder ein $\overline{C}$-System, und eine Brennfläche ist daher wieder eine Fläche $\overline{G}$ [23]).

Kapitel III.
Die Flächen mit ebenen Biegungskurven.

§ 1. Die Flächen mit einer Schar ebener Biegungskurven.

Die Kurven u, v sind eben, wenn die Determinanten:

$$(1) \qquad (\mathfrak{x}_{uuu}\,\mathfrak{x}_{uu}\,\mathfrak{x}_u) = 0; \quad (\mathfrak{x}_{vvv}\,\mathfrak{x}_{vv}\,\mathfrak{x}_v) = 0$$

[22]) *L. Bianchi*, Sopra alcune nuove classi di superficie ..., Annali di Matematica (2) 18 (1890), S. 340—349.

[23]) Vgl. 21.

sind. Da die Koordinaten jeder Fläche den Grundgleichungen:

$$(2)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{x}_{uu} &= a_1\mathfrak{x}_u + a_2\mathfrak{x}_v + L\mathfrak{X};\\ \mathfrak{x}_{uv} &= b_1\mathfrak{x}_u + b_2\mathfrak{x}_v + M\mathfrak{X};\\ \mathfrak{x}_{vv} &= c_1\mathfrak{x}_u + c_2\mathfrak{x}_v + N\mathfrak{X} \end{aligned}$$

genügen, so ist:

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}_{uuu} &= a_{1u}\mathfrak{x}_u + a_{2u}\mathfrak{x}_v + L_u\mathfrak{X} + a_1(a_1\mathfrak{x}_u + a_2\mathfrak{x}_v + L\mathfrak{X}) + a_2(b_1\mathfrak{x}_u + b_2\mathfrak{x}_v + M\mathfrak{X}) + L\mathfrak{X}_u;\\ \mathfrak{x}_{vvv} &= c_{1v}\mathfrak{x}_u + c_{2v}\mathfrak{x}_v + N_v\mathfrak{X} + c_1(b_1\mathfrak{x}_u + b_2\mathfrak{x}_v + M\mathfrak{X}) + c_2(c_1\mathfrak{x}_u + c_2\mathfrak{x}_v + N\mathfrak{X}) + N\mathfrak{X}_v;\\ \mathfrak{x}_{uuu} &= \alpha_1\mathfrak{x}_u + \alpha_2\mathfrak{x}_v + \alpha_3\mathfrak{X} + L\mathfrak{X}_u; \qquad \mathfrak{x}_{vvv} = \beta_1\mathfrak{x}_u + \beta_2\mathfrak{x}_v + \beta_3\mathfrak{X} + N\mathfrak{X}_v; \end{aligned}$$

$$\alpha_1 = a_{1u} + a_1^2 + a_2 b_1; \quad \alpha_2 = a_{2u} + a_1 a_2 + a_2 b_2; \quad \alpha_3 = L_u + a_1 L + a_2 M;$$
$$\beta_1 = c_{1v} + c_1 b_1 + c_2 c_1; \quad \beta_2 = c_{2v} + c_1 b_2 + c_2^2; \quad \beta_3 = N_v + c_1 M + c_2 N;$$

$$(3)\qquad \begin{aligned} (\mathfrak{x}_{uuu}\mathfrak{x}_{uu}\mathfrak{x}_u) &= D(\alpha_2 L - \alpha_3 a_2) + \frac{L^2}{D}(FL - EM) = 0;\\ (\mathfrak{x}_{vvv}\mathfrak{x}_{vv}\mathfrak{x}_v) &= D(-\beta_1 N + \beta_3 c_1) + \frac{N^2}{D}(GM - FN) = 0. \end{aligned}$$

Sind beide Kurvenscharen eben, so gelten also die Gleichungen:

$$(4)\qquad \begin{aligned} D^2(\alpha_2 L - a_2 L_u - a_1 a_2 L - a_2^2 M) + L^2(FL - EM) &= 0;\\ D^2(-\beta_1 N + c_1 N_v + c_1 c_2 N + c_1^2 M) + N^2(-FN + GM) &= 0. \end{aligned}$$

Sind insbesondere die ebenen Kurven konjugiert, so folgt:

$$(5)\qquad \begin{aligned} D^2(\alpha^2 L - a_2 L_u - a_1 a_2 L) + FL^3 &= D^2(a_{2u} + a_2 b_2)L - a_2 D^2 L_u + FL^3 = 0;\\ D^2(-\beta_1 N + c_1 N_v + c_1 c_2 N) - FN^3 &= D^2(-c_{1v} - c_1 b_1)N + c_1 D^2 N_v - FN^3 = 0; \end{aligned}$$

außerdem erfüllen die konjugierten Kurven die 3 Fundamentalgleichungen:

$$L_v - b_1 L + a_2 N = 0; \qquad J = LN = KD^2; \qquad N_u - b_2 N + c_1 L = 0;$$

für

$$L = \frac{J}{N};\quad L_v = \frac{1}{N^2}(NJ_v - JN_v);\quad N = \frac{J}{L};\quad N_u = \frac{1}{L^2}(LJ_u - JL_u)$$

folgt:

$$NJ_v - JN_v - b_1 JN + a_2 N^3 = 0; \qquad LJ_u - JL_u - b_2 JL + c_1 L^3 = 0;$$

also:

$$N_v = N\left(\frac{J_v}{J} - b_1\right) + \frac{a_2}{J}N^3; \quad L_u = L\left(\frac{J_u}{J} - b_2\right) + \frac{c_1}{J}L^3.$$

Setzt man die Werte von L_u und N_v in den Ebenenbedingungen 5 ein, so folgt:

$$\left[a_{2u} + 2a_2 b_2 - a_2\frac{J_u}{J}\right]L + \left[\frac{F}{D^2} - \frac{a_2 c_1}{J}\right]L^3 = aL + cL^3 = 0;$$
$$\left[c_{1v} + 2c_1 b_1 - c_1\frac{J_v}{J}\right]N + \left[\frac{F}{D^2} - \frac{a_2 c_1}{J}\right]N^3 = bN + cN^3 = 0.$$

Ist das konjugierte Netz Biegungsnetz, so ist nach I, § 1, 1: $a = b = 0$. Ist also nur eine Schar (z. B. $v = \text{const.}$) eben, so folgt wegen $a = 0$, daß $c = 0$ ist. Ist aber $b = 0$ und $c = 0$, so ist auch die zweite Schar eben. Die Bedingung $c = 0$ läßt sich leicht geometrisch deuten. Wegen 2 ist:

$$\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_{uu} = \mathfrak{x}_u \times (a_2\mathfrak{x}_v + L\mathfrak{X}); \qquad \mathfrak{x}_v \times \mathfrak{x}_{vv} = \mathfrak{x}_v \times (c_1\mathfrak{x}_u + N\mathfrak{X});$$

also:

$$(\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_{uu})(\mathfrak{x}_v \times \mathfrak{x}_{vv}) = F(a_2 c_1 F + LN) - a_2 c_1 EG = LNF - a_2 c_1 D^2 \text{ proportional } c;$$

$c = 0$ ist also die Bedingung für die Orthogonalität der Schmiegebenen. Wir haben somit das Ergebnis:

Ein konjugiertes System mit einer Schar ebener Kurven ist dann und nur dann Biegungsnetz, wenn auch die zweite Schar eben ist, und die Ebenen beider Scharen orthogonal sind.

Schreibt man die Bedingung für die Orthogonalität der Schmiegebenen in der Form: $(KD^2 + M^2)F = a_2c_1D^2$, so sieht man, daß eine Biegung mit Erhaltung orthogonaler Schmiegebenen nur möglich ist, wenn M biegungsinvariant ist. Insbesondere gilt für $M = 0$:

Bleibt bei einer Biegung ein schmiegorthogonales konjugiertes System konjugiert, so bleibt es schmiegorthogonal. Ebenso gilt: *Bleibt bei einer Biegung ein schmiegorthogonales konjugiertes System schmiegorthogonal, so bleibt es konjugiert.*

Da bei einer Biegung mit Erhaltung des konjugierten Systems $c = 0$ und außerdem $a = 0$ und $b = 0$ bleibt, da ferner $LN = \bar{L}\bar{N} = J$, und $\bar{L}$ und $\bar{N}$ denselben Codazzigleichungen wie L und N genügen, so müssen die Kurven bei solchen Biegungen eben bleiben. Also:

Ein Biegungsnetz mit zwei Scharen ebener Kurven in orthogonalen Ebenen bleibt bei Biegungen, welche das konjugierte System wieder in ein konjugiertes System überführen, erhalten. Umgekehrt gilt:

Jedes konjugierte System mit zwei Scharen ebener Kurven in orthogonalen Ebenen gestattet eine stetige Folge von Verbiegungen, bei der das System konjugiert bleibt, und beide Scharen dauernd in orthogonalen Ebenen bleiben. Ferner gilt:

In jedem schmiegorthogonalen Biegungsnetz sind beide Scharen eben *).

§ 2. Die Flächen mit zwei Scharen ebener Biegungskurven.

Da jede Ebene der einen Schar alle Ebenen der anderen Schar senkrecht schneiden muß, so umhüllen die Ebenen der zweiten Schar einen Zylinder, der von allen Ebenen der ersten Schar orthogonal geschnitten wird. Bei den ebenen Biegungsnetzen muß also eine Schar in parallelen Ebenen liegen und die andere Schar von den Berührungsebenen eines dazu senkrechten Zylinders ausgeschnitten werden. Wir erhalten drei Typen von Flächen, je nachdem der Zylinder in eine uneigentliche Gerade, in eine eigentliche Gerade entartet, oder nicht entartet. Im ersten Fall erhalten wir Schiebflächen, deren erzeugende Kurven in orthogonalen Ebenen liegen, denn aus: $x = u$, $y = v$, $z = f(u, v)$ folgt wegen:

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ f & f_v & f_{uv} \end{vmatrix} = 0 : f_{uv} = 0; \quad f = U + V.$$

Im zweiten Fall erhalten wir die achsenaffinen Flächen [24]), denn aus: $x = f\cos v$, $y = f\sin v$, $z = u$ folgt wegen:

$$M = \begin{vmatrix} f_v\cos v - f\sin v & f_{uv}\cos v - f_u\sin v \\ f_v\sin v + f\cos v & f_{uv}\sin v + f_u\cos v \end{vmatrix} = 0:$$

$$ff_{uv} - f_uf_v = 0, \quad \text{oder:} \quad \frac{\partial^2 \lg f}{\partial u\,\partial v} = 0, \quad \text{also} \quad f = UV.$$

Im dritten, allgemeinen Fall erhalten wir die „Affingesimsflächen mit zylindrischer Abwicklung".

---

*) Diese von Herrn Professor Dr. Liebmann angeregte Fragestellung war der Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit.

[24]) *G. Darboux*, Leçons sur la théorie générale des surfaces, 2. Auflage I (1915), S. 182—83. Vgl. auch: *M. Lagally*, Über gewisse Verbiegungen der achsenaffinen Flächen, Münchner Sitzungsberichte 1919, S. 369—379.

Ist v die Bogenlänge der Leitkurve: $x = \xi(v)$, $y = \eta(v)$, $z = 0$ des Zylinders, so ist: $\xi'^2 + \eta'^2 = 1$; $\xi'\xi'' + \eta'\eta'' = 0$; $\xi''^2 + \eta''^2 = \frac{1}{r^2}$. Die Flächengleichung lautet: $x = \xi + \xi' f$; $y = \eta + \eta' f$; $z = u$. Wegen: $M = \begin{vmatrix} \xi'(1+f_v) + \xi'' f & \xi'' f_u + \xi' f_{uv} \\ \eta'(1+f_v) + \eta'' f & \eta'' f_u + \eta' f_{uv} \end{vmatrix} = 0$ folgt: $(1 + f_v) f_u - f f_{uv} = 0$, sofern $\Delta = \begin{vmatrix} \xi' & \xi'' \\ \eta' & \eta'' \end{vmatrix} = \frac{1}{r} \neq 0$ ist; also $\frac{\partial}{\partial u} \frac{f}{1+f_v} = 0$, oder integriert: $\frac{1+f_v}{f} = V$.

Wir setzen: $f = \varphi\psi$, wobei $\frac{\varphi_v}{\varphi} = V$, $\varphi = U_1 e^{\int V \partial v} = U_1 V_1$; dann folgt: $1 + f_v = 1 + \varphi_v\psi + \varphi\psi_v = V\psi\varphi$; also: $\psi_v = -\frac{1}{\varphi}$, $\psi = -\int \frac{dv}{U_1 V_1} + U_2$, somit: $f = \varphi\psi = U_1 V_1 \left(U_2 - \frac{1}{U_1}\int \frac{dv}{V_1}\right) = V\left(U - \int \frac{dv}{V}\right)$.

Die Flächengleichung erhält somit die Form:

$$x = \xi + \xi' V\left(U - \int \frac{dv}{V}\right); \quad y = \eta + \eta' V\left(U - \int \frac{dv}{V}\right); \quad z = u.$$

Die Gleichung zeigt, daß die Meridiane $v = \text{const.}$ affin verzerrt und in ihrer Ebene um die Strecke $V\int \frac{dv}{V}$ gegen die zugehörige Zylindererzeugende verschoben werden. Für $V = \text{const.}$ tritt keine Verzerrung auf, die Verschiebung ist gleich der Bogenlänge v, die Punkte der Meridiane beschreiben Planevolventen, die Fläche ist Gesimsfläche mit zylindrischer Abwicklung.

§ 3. Ausführung der Biegung der Affingesimsflächen.

Wir schreiben die Leitkurve des Zylinders in der Form:

$$(1) \qquad \xi = \int_0^v \cos\left(\int_0^v \frac{dv}{r}\right) dv; \qquad \eta = \int_0^v \sin\left(\int_0^v \frac{dv}{r}\right) dv,$$

wo v die Bogenlänge bedeutet und der Zylinder so gelegt ist, daß er bei $v = 0$ die Ebene $y = 0$ längs der z-Achse berührt. Zwei Affingesimsflächen, deren Lage so normiert ist, haben dann die Gleichungen:

$$x = \int_0^v \cos\left(\int_0^v \frac{dv}{r}\right) dv + \cos\left(\int_0^v \frac{dv}{r}\right) V(v)\left\{U(u) - \int \frac{dv}{V(v)}\right\};$$

$$y = \int_0^v \sin\left(\int_0^v \frac{dv}{r}\right) dv + \sin\left(\int_0^v \frac{dv}{r}\right) V(v)\left\{U(u) - \int \frac{dv}{V(v)}\right\}; \quad z = u;$$

$$\bar{x} = \int_0^{\bar{v}(v)} \cos\left(\int_0^{\bar{v}(v)} \frac{d\bar{v}_{(v)}}{\bar{r}(v)}\right) d\bar{v}(v) + \cos\left(\int_0^{\bar{v}(v)} \frac{d\bar{v}_{(v)}}{\bar{r}(v)}\right) \bar{V}(v)\left\{\bar{U}(u) - \int \frac{d\bar{v}_{(v)}}{\bar{V}(v)}\right\};$$

$$\bar{y} = \int_0^{\bar{v}(v)} \sin\left(\int_0^{\bar{v}(v)} \frac{d\bar{v}_{(v)}}{\bar{r}(v)}\right) d\bar{v}(v) + \sin\left(\int_0^{\bar{v}(v)} \frac{d\bar{v}_{(v)}}{\bar{r}(v)}\right) \bar{V}(v)\left\{\bar{U}(u) - \int \frac{d\bar{v}_{(v)}}{\bar{V}(v)}\right\}; \quad \bar{z} = \bar{u}(u).$$

Sie sind aufeinander verbiegbar, wenn ihre Fundamentalgrößen erster Ordnung übereinstimmen, wenn also:

$$E = 1 + V^2U'^2 = \bar{E} = \bar{u}'^2 + \bar{V}^2\,\bar{U}'^2;$$

$$F = VV'U'\Big(U - \int\frac{dv}{V}\Big) = \bar{F} = \bar{V}\bar{V}'\bar{U}'\Big(\bar{U} - \int\frac{d\bar{v}}{\bar{V}}\Big); \tag{2}$$

$$G = \Big(V'^2 + \frac{V^2}{r^2}\Big)\Big(U - \int\frac{dv}{V}\Big)^2 = \bar{G} = \Big(\bar{V}'^2 + \frac{\bar{V}^2\bar{v}'^2}{\bar{r}^2}\Big)\Big(\bar{U} - \int\frac{d\bar{v}}{\bar{V}}\Big)^2.$$

Aus der dritten Gleichung folgt zunächst, daß sich $\bar{U}$ von U nur um einen konstanten Faktor unterscheiden darf; dieser kann aber, wie aus der Flächengleichung ersichtlich ist, in die Funktion V hineingezogen werden, also unbeschadet der Allgemeinheit $= 1$ gesetzt werden. Also: $\bar{U}(u) = U(u)$. Ferner muß sein:

$$\frac{dv}{V(v)} = \frac{\bar{v}'(v)\,dv}{\bar{V}(v)} \quad \text{oder:} \quad \bar{v}(v) = \int\frac{\bar{V}(v)}{V(v)}\,dv = \int\frac{\sqrt{V^2(v) + K}}{V(v)}\,dv,$$

denn aus der zweiten Gleichung folgt:

$$V(v)\,V'(v) = \bar{V}(v)\,\bar{V}'(v); \qquad \bar{V}^2(v) = V^2(v) + K; \qquad \bar{V}(v) = \sqrt{V^2(v) + K}.$$

Aus der ersten Gleichung folgt weiter:

$$\bar{u}'^2(u) = 1 - K\,U'^2(u) \quad \text{oder:} \quad \bar{u}(u) = \int\sqrt{1 - K\,U'^2(u)}\,\partial u.$$

Aus der dritten Gleichung folgt für die Krümmung des neuen Leitzylinders wegen:

$$V'^2(v) + \frac{V^2(v)}{r^2} = \bar{V}'^2(v) + \frac{\bar{V}^2(v)\,\bar{v}'^2(v)}{\bar{r}^2(v)} = \frac{V^2(v)\,V'^2(v)}{V^2(v) + K} + \frac{(V^2(v) + K)^2}{V^2(v)\,\bar{r}^2(v)}:$$

$$\frac{1}{\bar{r}^2} = \frac{V^2}{(V^2 + K)^2}\Big[V'^2 + \frac{V^2}{r^2} - \frac{V^2\,V'^2}{V^2 + K}\Big]; \quad \bar{r}(K=0) = r; \quad \bar{v}(K=0) = v; \text{ also:}$$

$$\frac{1}{\bar{r}^2} = \frac{V^2}{(V^2 + K)^2}\Big[\frac{V'^2K}{V^2 + K} + \frac{V^2}{r^2}\Big]; \quad \frac{1}{\bar{r}} = \frac{V}{V^2 + K}\sqrt{\frac{V'^2K}{V^2 + K} + \frac{V^2}{r^2}}. \tag{3}$$

Die Gleichungen:

$$\bar{x} = \int_0^v \cos\Big(\int_0^v \sqrt{\frac{V'^2K}{V^2 + K} + \frac{V^2}{r^2}}\cdot\frac{dv}{\sqrt{V^2 + K}}\Big)\frac{\sqrt{V^2 + K}}{V}\,dv$$

$$+ \cos\Big(\int_0^v \sqrt{\frac{V'^2K}{V^2 + K} + \frac{V^2}{r^2}}\cdot\frac{dv}{\sqrt{V^2 + K}}\Big)\sqrt{V^2 + K}\Big(U - \int\frac{dv}{V}\Big);$$

$$\bar{y} = \int_0^v \sin\Big(\int_0^v \sqrt{\frac{V'^2K}{V^2 + K} + \frac{V^2}{r^2}}\cdot\frac{dv}{\sqrt{V^2 + K}}\Big)\frac{\sqrt{V^2 + K}}{V}\,dv$$

$$+ \sin\Big(\int_0^v \sqrt{\frac{V'^2K}{V^2 + K} + \frac{V^2}{r^2}}\cdot\frac{dv}{\sqrt{V^2 + K}}\Big)\sqrt{V^2 + K}\Big(U - \int\frac{dv}{V}\Big);$$

$$\bar{z} = \int_0^u \sqrt{1 - K\,U'^2(u)}\,\partial u$$

ergeben also allein durch Quadraturen eine von einer willkürlichen konstanten K abhängige Gruppe aufeinander verbiegbarer Affingesimsflächen. Bedenkt man, daß

$$\bar{U} = U; \quad \bar{V} = \sqrt{V^2 + K}; \quad \int\sqrt{1 - K\,U'^2}\,\partial u = u$$

gerade entsprechende Meridiane aufeinander verbiegbarer achsenaffiner Flächen sind, so folgt:

Hat man ∞^1 aufeinander verbiegbare achsenaffine Flächen und läßt man die Ebenen der zu jeder Fläche K gehörigen Meridiane auf Zylindern: $\frac{1}{\bar{r}^2} = \frac{V^2}{(V^2+K)^2}\left[\frac{V'^2 K}{V^2+K} + \frac{V^2}{\bar{r}(0)^2}\right]$ *so gleiten, daß sich die Abstände der Meridianpunkte von den Berührungserzeugenden um:* $\sqrt{V^2+K}\int\frac{dv}{V}$ *verringern und zwischen entsprechenden Bogen der Leitkurven die Beziehung:* $\bar{v}(K) = \int\frac{\sqrt{V^2+K}}{V}\partial v$ *besteht, so erhält man ∞^1 aufeinander verbiegbare Affingesimsflächen. Da der Leitzylinder* $\frac{1}{\bar{r}(0)}$ *willkürlich gewählt werden kann, so gewinnt man auf diese Weise aus einer Biegungsgruppe achsenaffiner Flächen unendlich viele Biegungsgruppen von Affingesimsflächen mit zylindrischer Abwicklung.*

Speziell für $V = 1$ erhält man die Biegung der Gesimsflächen mit zylindrischer Abwicklung: $\overline{U} = U$; $\overline{V} = \sqrt{1+K}$; $\bar{v} = v\sqrt{1+K}$; $\bar{u} = \int_0^u \sqrt{1 - K\,U'^2}\,\partial u$; $\bar{r} = r\,(1+k)$.

Da: $\frac{1}{\bar{r}} = \frac{d\bar{\tau}}{d\bar{v}} = \frac{1}{1+K}\frac{1}{r} = \frac{1}{1+K}\frac{d\tau}{dv}$, so ist: $\frac{d\bar{\tau}}{dv} = \frac{1}{\sqrt{1+K}}\frac{d\tau}{dv}$, also: $\bar{\tau} = \frac{\tau}{\sqrt{1+K}}$.
In diesem Fall lautet der obige Satz:

Hat man ∞^1 aufeinander verbiegbare Drehflächen und rollt man die Ebenen der zu jeder Drehfläche K gehörigen Meridiane auf Zylindern: $\bar{r} = \bar{r}(0)\,(1+K)$ *ab, so daß entsprechende Bogen der Leitkurven sich wie* $\sqrt{1+K} : 1$ *verhalten, so erhält man ∞^1 aufeinander verbiegbare Gesimsflächen mit zylindrischer Abwicklung. Da* $\bar{r}(0)$ *willkürlich ist, erhält man unendlich viele Biegungsgruppen.* Dieser Vorgang wird am anschaulichsten in dem Fall, wo die Leitkurve ein Kreis $r = \text{const.}$ ist. Wir betrachten einen geodätischen Breitenkreis $U' = 0$, $U = a$ in der Ebene $z = 0$. Sei $K = 3$. Ihm entspricht bei der Biegung wieder ein geodätischer Breitenkreis $\overline{U} = 2a$ in $z = 0$. Dem Bogen v des Leitkreises $r = c$ entspricht der Bogen $2v$ des neuen Leitkreises $r = 4c$, dem Tangentenwinkel τ des Leitkreises $r = c$ entspricht der Tangentenwinkel $\frac{\tau}{2}$ des Leitkreises $r = 4c$. Man kann also auf einfache Weise Biegungsgruppen von Gesimsflächen gewinnen, deren Leitzylinder Kreiszylinder sind. Die Biegungsgruppe der Gesimsflächen mit zylindrischer Abwicklung läßt sich bekanntlich auch so darstellen:

$$x = \frac{V}{a}\cos(a\,u) + \int U\sin(a\,u)\,\partial u;\quad y = \frac{V}{a}\sin(a\,u) - \int U\cos(a\,u)\,\partial u;\quad z = \int\sqrt{1 - \frac{V'^2}{a^2}}\,\partial v.$$

Insbesondere lautet die Biegungsgruppe der Drehflächen:

$$x = a\,U\cos\frac{v}{a};\quad y = a\,U\sin\frac{v}{a};\quad z = \int\sqrt{1 - a^2\,U'^2}\,\partial u.$$

Die Biegungsgruppe der Schiebflächen, deren erzeugende Kurven in orthogonalen Ebenen liegen, ist nach Peterson [25]):

$$x = \int\sqrt{1 - \frac{V'^2}{a^2}}\,\partial v;\quad y = \int\sqrt{1 - U'^2 a^2}\,\partial u;\quad z = a\,U + \frac{V}{a}.$$

§ 4. Die zugehörigen Assoziierten.

Wir suchen die Rückassoziierten der geraden Konoide, deren Gleichung bezogen auf die Haupttangentenkurven lautet:

(1) $$x = u\,V;\quad y = -\,u\,v;\quad z = \int(V - v\,V')\,dv$$ [26]).

[25]) *Peterson*, Über Kurven und Flächen, Moskau und Leipzig, S. 71.

[26]) *L. Bianchi*, Differentialgeometrie, S. 133.

Die Kurven $v = \text{const.}$ sind die Erzeugenden senkrecht zur Achse. Da das Krümmungsmaß $K = -1:(u^2+v^2+V^2)^2$ ist, so gehören die geraden Konoide zu den Bianchischen Flächen, ihre Rückassoziierten S gestatten also eine stetige Folge von Biegungen mit Erhaltung des konjugierten Systems. Für die Flächennormalen der geraden Konoide gilt: $X = v:\sqrt{\varrho}$; $Y = V:\sqrt{\varrho}$; $Z = u:\sqrt{\varrho}$. Die mit $\sqrt{\varrho}$ multiplizierten Ebenenkoordinaten X, Y, Z, W der Rückassoziierten S genügen also derselben Laplacegleichung: $\vartheta_{uv} = 0$, so daß die Gleichung dieser Flächen in Ebenenkoordinaten ist:

$$(2) \qquad vx + Vy + uz = U^* + V^*.$$

Durch Differentiation folgt: $z = U^{*\prime}$; $x + V'y = V^{*\prime}$; d. h.: Die Kurven $u = \text{const.}$ liegen in den Ebenen $z = \text{const.}$, die Kurven $v = \text{const.}$ liegen in den Tangentialebenen eines dazu senkrechten Zylinders.

Die allgemeinsten Flächen, denen die geraden Konoide assoziiert sind, sind die Affingesimsflächen mit zylindrischer Abwicklung.

Sind auf einer Fläche die Haupttangentenkurven orthogonal, so ist sie Minimalfläche, und folglich das Haupttangentennetz sowohl, als auch dessen sphärisches Bild isotherm, das konjugierte System der Rückassoziierten ist also orthogonal, d. h. Krümmungsnetz.

Die Flächen, welche eine stetige Folge von Biegungen mit Erhaltung der Krümmungslinien gestatten, sind somit die Rückassoziierten der Bianchischen Flächen, die zugleich Minimalflächen sind, d. h. der gemeinen Schraubenflächen [27]). Dies läßt sich leicht beweisen:

Wegen: $f = 0$ ist: $\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}' = \frac{e_v}{2e}$; $\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}' = \frac{g_u}{2g}$; also:

$$\frac{\partial}{\partial v}\lg e + \frac{\partial}{\partial v}\lg(U+V) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial u}\lg g + \frac{\partial}{\partial u}\lg(U+V) = 0;$$

integriert: $e = U^*:(U+V)$; $g = V^*:(U+V)$. Bei geeigneter Normierung der Parameter wird: $e = g = 1:(U+V)$; $f = 0$. Da $E = G = (U+V)$ ist, so folgt für das Krümmungsmaß:

$$K = -\frac{1}{(U+V)^2} = -\frac{1}{2(U+V)}\left[\frac{\partial^2}{\partial u^2}\lg(U+V) + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\lg(U+V)\right]$$

oder:

$$2 = U'' - \frac{U'^2}{U+V} + V'' - \frac{V'^2}{U+V}.$$

Es muß, wie sich durch genauere Überlegung ergibt, entweder $U = \text{const.}$ oder $V = \text{const.}$ sein. Ist $V = \text{const.}$, so ist $\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}' = 0$, die Krümmungskurven $v = \text{const.}$ sind wegen $\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} = 0$ geodätisch, also eben. Da die Krümmungskurven $u = \text{const.}$ die Ebenen der Krümmungskurven $v = \text{const.}$ orthogonal durchsetzen, so sind die Tangenten an $u = \text{const.}$ längs $v = \text{const.}$ parallel, die Kurven $v = \text{const.}$ sind zylindrisch, und es ist $\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} = 0$. Dann müssen aber die Haupttangentenkurven $v = \text{const.}$ der Assoziierten wegen: $\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}' = 0$ geodätisch, also gerade sein. Die krummen Haupttangentenkurven $u = \text{const.}$ haben wegen $K = -1:(U+\bar{c})^2$ konstante Torsion. Da sie als Orthogonal-

[27]) *L. Bianchi*, Differentialgeometrie, S. 343.

trajektorien der Erzeugenden auf diesen gleiche Stücke abschneiden, da ferner ihre Hauptnormalen mit den Erzeugenden zusammenfallen, so sind sie Bertrandkurven und folglich gemeine Schraubenlinien, die Assoziierte ist gemeine Schraubenfläche. Da die gemeinen Schraubenflächen spezielle gerade Konoide sind, so folgt:

Die Gesimsflächen mit zylindrischer Abwicklung sind die einzigen Flächen, welche sich stetig mit Erhaltung der Krümmungslinien verbiegen lassen.

Beim beliebigen geraden Konoid sind längs der Achse die Erzeugenden orthogonal, es entsprechen der Achse auf der assoziierten Affingesimsfläche isolierte, geodätische Krümmungslinien ($U' = 0$). Schneiden längs einer Erzeugenden die Haupttangentenkurven orthogonal, so entsprechen ihr auf der Affingesimsfläche ebenfalls isolierte, geodätische Krümmungslinien ($V' = 0$). Ist speziell das gerade Konoid ein gleichseitig hyperbolisches Paraboloid, so ist wegen: $\left\{\overline{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}}\right\} = 0$; $\left\{\overline{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}}\right\} = 0 : \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} = 0$; $\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} = 0$, d. h.:

Die Rückassoziierten des gleichseitig hyperbolischen Paraboloids sind die Schiebflächen, deren erzeugende Kurven in orthogonalen Ebenen liegen [27]).

Da längs der Scheiteltangenten die Erzeugenden orthogonal schneiden, so entsprechen den Scheiteltangenten auf der Schiebfläche isolierte, geodätische Krümmungskurven.

Kapitel IV.

Die Flächen mit zylindrischen Biegungskurven.

§ 1. Bestimmung aller Flächen mit einer Schar zylindrischer nichtisotroper Biegungskurven.

Die Kurven $v = \text{const.}$ eines konjugierten Systems der Fläche S sind zylindrisch, wenn die Tangenten an die Kurven $u = \text{const.}$ längs $v = \text{const.}$ alle zu einer Richtung parallel sind, wenn:

$$x_{iv} = V_i\,\varphi \text{ ist, also wegen: } x_{iuv} = V_i\,\varphi_u = \frac{\varphi_u}{\varphi}\,x_{iv}$$

das Symbol:

$$\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} = 0 \qquad \text{ist.} \tag{1}$$

Die Haupttangentenkurven $v = \text{const.}$ der Assoziierten $\bar{S}$ von S sind dann wegen $\left\{\overline{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}}\right\} = 0$ geodätisch, also gerade; dabei sei nochmals betont, daß die assoziierten Flächen $\bar{S}$ nur dann existieren, wenn das konjugierte System der Bedingung: $\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}'_u = \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}'_v$ genügt. Ist insbesondere das zylindrische konjugierte System Biegungsnetz, so müssen die assoziierten Regelflächen Bianchische Flächen sein. Für das sphärische Bild eines zylindrischen Biegungsnetzes gilt somit:

$$\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}' = -\frac{1}{2}\frac{V'}{U+V};\quad \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}' = 0;\quad \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}' = -\frac{1}{2}\frac{U'}{U+V}. \tag{2}$$

Wir setzen voraus, daß U sich nicht auf eine Konstante reduziert. In diesem Fall ist nämlich wegen: $\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}' = 0$ das Symbol: $\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} = 0$, also wegen: $\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} = 0$ das Produkt:

$$KG = \frac{\partial}{\partial u}\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} - \frac{\partial}{\partial v}\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}^2 = 0. \tag{3}$$

Da $K \neq 0$ vorausgesetzt wird, so folgt $G = 0$, d. h. in dem ausgeschlossenen Fall sind die Kurven $u = \text{const.}$ Minimalkurven. Ist: $d\sigma^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2$ das Bogenelement des sphärischen Bildes, so erfüllen die Christoffelsymbole $\left\{\begin{matrix} ik \\ s \end{matrix}\right\}'$ die Identitäten:

$$
\begin{aligned}
e_u &= 2e\left\{\begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix}\right\}' + 2f\left\{\begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix}\right\}';\\
e_v &= 2e\left\{\begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix}\right\}' + 2f\left\{\begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix}\right\}';\\
g_u &= 2f\left\{\begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix}\right\}' + 2g\left\{\begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix}\right\}';\\
g_v &= 2f\left\{\begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix}\right\}' + 2g\left\{\begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix}\right\}'.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Da in unserm Fall $\left\{\begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix}\right\}' = 0$ ist, so folgt: $\left\{\begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix}\right\}' = \frac{e_u}{2e}$. Die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung zwischen den e, f, g, die besagt, daß die Krümmung der Form $d\sigma^2$ den Wert $+1$ hat, lautet:

$$e = -\frac{\partial}{\partial u}\left\{\begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix}\right\}' + \frac{e_u}{2e}\left\{\begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix}\right\}' - \left\{\begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix}\right\}'^2; \text{ oder wegen 2:}$$

$$4\,\frac{U+V}{U'} - \left[2\,\frac{U''}{U'} - 3\,\frac{U'}{U+V}\right]\frac{1}{e} = \left[\frac{1}{e}\right]_u, \tag{5}$$

ist also eine lineare Differentialgleichung für $x = \frac{1}{e}$. Die zugehörige verkürzte Differentialgleichung lautet:

$$\bar{x}_u + \left[2\,\frac{U''}{U'} - 3\,\frac{U'}{U+V}\right]\bar{x} = 0; \quad \text{oder:}$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\lg\frac{\bar{x}\,U'^2}{(U+V)^3} = 0, \quad \text{also: } \bar{x} = \frac{V^*(U+V)^3}{U'^2}.$$

Setzt man: $x = \varphi\bar{x}$, so folgt: $\frac{4(U+V)}{U'} = \varphi_u\bar{x}$; oder:

$$4\,\frac{U'}{(U+V)^2} = V^*\varphi_u; \text{ integriert: } V^*\varphi + \frac{4}{U+V} = \bar{V}, \quad \text{also:}$$

$$x = \frac{1}{e} = \bar{x}\,\varphi = \frac{(U+V)^3}{U'^2}\left(\bar{V} - \frac{4}{U+V}\right) = \frac{(U+V)^2}{U'^2}\left[(U+V)\bar{V} - 4\right], \quad \text{somit:}$$

$$e = \frac{U'^2}{(U+V)^2}\,\frac{1}{\left[(U+V)\bar{V} - 4\right]}. \tag{6}$$

Nun muß aber wegen: $\left\{\begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix}\right\}' = 0$; $-fe_u + 2ef_u - ee_v = 0$ sein.

Nach (4) und (2) ist: $e_v = -e\,\frac{V'}{(U+V)} - f\,\frac{U'}{U+V}$ oder: $-f = \frac{U+V}{U'}\,e_v + e\,\frac{V'}{U'}$; also:

$$
\begin{aligned}
-fe_u &= \frac{2(U+V)}{U'}\,e_u\,e_v + \frac{V'}{U'}\,e\,e_u - \frac{U+V}{U'}\,e_u\,e_v + 2\,ef_u\\
&= \frac{-2(U+V)}{U'}\,e\,e_{uv} - 2\,\frac{V'}{U'}\,e\,e_u + 2\,\frac{(U+V)}{U'^2}\,U''\,ee_v - 2\,ee_v + 2\frac{U''\,V'}{U'^2}\,e^2, \text{ also:}\\
fe_u &- 2\,ef_u + ee_v =
\end{aligned}
$$

$$2\frac{U+V}{U'}(e e_{uv} - e_u e_v) + \frac{V'}{U'} e e_u + \left[3 - 2\frac{U''}{U'^2}(U+V)\right] e e_v + \frac{U+V}{U'} e_u e_v - \frac{2U''V'^2}{U'^2} e^2 = 0$$

oder:

$$(7) \qquad 2\frac{U+V}{U'}[\lg e]_{uv} + \frac{V'}{U'}[\lg e]_u + \left[3 - \frac{2U''}{U'^2}(U+V)\right][\lg e]_v + \frac{U+V}{U'}[\lg e]_u [\lg e]_v - \frac{2U''V'}{U'^2} = 0.$$

Setzt man zur Abkürzung $(U+V)\,\overline{V} - 4 = \varrho$, so folgt aus 6:

$$\lg e = 2\lg U' - 2\lg(U+V) - \lg\varrho;\ [\lg e]_u = \frac{2U''}{U'} - 2\frac{U'}{U+V} - [\lg\varrho]_u;$$

$$[\lg e]_v = -\frac{2V'}{U+V} - [\lg\varrho]_v;\ [\lg e]_{uv} = 2\frac{U'V'}{(U+V)^2} - [\lg\varrho]_{uv};\ \text{also:}$$

$$2\frac{U+V}{U'}[\lg e]_{uv} = 4\frac{V'}{U+V} - 2\frac{U+V}{U'}[\lg\varrho]_{uv};$$

$$\frac{V'}{U'}[\lg e]_u = 2\frac{V'U''}{U'^2} - 2\frac{V'}{U+V} - \frac{V'}{U'}[\lg\varrho]_u;$$

$$\left[3 - \frac{2U''}{U'^2}(U+V)\right][\lg e]_v = \frac{6V'}{U+V} - 3[\lg\varrho]_v + \frac{4U''V'}{U'^2} + 2\frac{U''}{U'^2}(U+V)[\lg\varrho]_v;$$

$$\frac{U+V}{U'}[\lg e]_u [\lg e]_v = -4\frac{U''V'}{U'^2} - 2\frac{U''}{U'^2}(U+V)[\lg\varrho]_v + 4\frac{V'}{U+V} + 2[\lg\varrho]_v + 2\frac{V'}{U'}[\lg\varrho]_u + [\lg\varrho]_u [\lg\varrho]_v \frac{U+V}{U'}.$$

ϱ genügt also der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$-2\frac{U+V}{U'}[\lg\varrho]_{uv} + \frac{V'}{U'}[\lg\varrho]_u - [\lg\varrho]_v + \frac{U+V}{U'}[\lg\varrho]_u [\lg\varrho]_v = 0;\ \text{oder:}$$

$$(8) \qquad -2\varrho\varrho_{uv} + 3\varrho_u\varrho_v + \frac{V'}{U+V}\varrho_u\varrho - \frac{U'}{U+V}\varrho_v\varrho = 0.$$

Da: $\varrho = (U+V)\,\overline{V} - 4;\ \varrho_u = U'\overline{V};\ \varrho_v = (U+V)\,\overline{V}' + V'\overline{V};\ \varrho_{uv} = U'\overline{V}'$, so ist:

$$-2\varrho\varrho_{uv} = -2(U+V)\,U'\,\overline{V}\overline{V}' + 8\,U'\overline{V}';$$

$$+3\varrho_u\varrho = U'\,V'\,\overline{V}^2 - 4\,V'U'\frac{\overline{V}}{U+V};$$

$$-\frac{U'}{U+V}\varrho_v\varrho = -(U+V)U'\overline{V}\overline{V}' - U'V'\overline{V}^2 + 4\,U'\overline{V}' + 4\frac{V'U'\overline{V}}{U+V};\ \text{also folgt:}$$

$$12\overline{V}' + 3V'\overline{V}^2 = 0;\ \text{oder:}\ -4\overline{V}' = V'\overline{V}^2;\ \text{also:}\ V' = -\frac{4\overline{V}'}{\overline{V}^2} = 4\left[\frac{1}{\overline{V}}\right]_v;$$

integriert: $V + c = \frac{4}{\overline{V}}$; somit: $\overline{V} = \frac{4}{V+c}$.

Setzt man diesen Wert von $\overline{V}$ in (6) ein, so folgt:

$$(9) \qquad e = \frac{1}{4}\frac{U'^2(V+c)}{(U+V)^2(U-c)}.$$

Wegen: $-\frac{f}{e} = \frac{U+V}{U'}\frac{e_v}{e} + \frac{V'}{U'}$ und: $[\lg e]_v = \frac{V'}{V+c} - 2\frac{V'}{U+V}$ ist:

$$-\frac{f}{e}=\frac{(U+V)\,V'-(V+c)V'}{U'(V+c)}=\frac{V'(U-c)}{U'(V+c)};\quad \text{also:}$$

$$f=-\frac{1}{4}\frac{U'V'}{(U+V)^2}. \tag{10}$$

Da $\frac{\partial}{\partial u}\lg\sqrt{eg-f^2}=\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}'+\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}'$, so folgt wegen:

$$\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}'=\frac{e_u}{2e}=\frac{\partial}{\partial u}\lg\sqrt{e};\quad -\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}'=\frac{1}{2}\frac{U'}{U+V}=\frac{\partial}{\partial u}\lg\sqrt{U+V}:$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\lg\frac{\sqrt{eg-f^2}\sqrt{U+V}}{\sqrt{e}}=0;\quad \text{oder integriert:}$$

$$eg-f^2=\frac{V^*e}{U+V}. \tag{11}$$

Es ist also: $g=\frac{V^*}{U+V}+\frac{f^2}{e}$, somit:

$$g=\frac{V^*}{U+V}+\frac{4U'^2V'^2(U+V)^2(U-c)}{4\cdot 4(U+V)^4U'^2(V+c)},\quad \text{also:}$$

$$g=\frac{V^*}{U+V}+\frac{1}{4}\frac{V'^2(U-c)}{(U+V)^2(V+c)}. \tag{12}$$

Die Bedingung: $g_u+\frac{V'}{U+V}f+\frac{U'}{U+V}g=0$ ist erfüllt, denn wegen:

$$g_u=-\frac{V^*U'}{(U+V)^2}+\frac{1}{4}\frac{V'^2U'}{(V+c)(U+V)^2}-\frac{1}{2}\frac{V'^2(U-c)U'}{(V+c)(U+V)^3};$$

$$f\frac{V'}{U+V}=-\frac{U'V'^2}{4(U+V)};\quad g\frac{U'}{U+V}=\frac{U'V^*}{(U+V)^2}+\frac{1}{4}\frac{U'V'^2(U-c)}{(U+V)^3(V+c)};$$

folgt:

$$g_u+\frac{V'}{U+V}f+\frac{U'}{U+V}g\sim U+V-V+c-U-c=0.$$

Ebenso sind die übrigen Identitäten 4 erfüllt. Da somit die Beziehungen:

$$\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}'=-\frac{1}{2}\frac{V'}{U+V};\quad \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}'=-\frac{1}{2}\frac{U'}{U+V};\quad \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}'=0;\quad K=+1$$

bestehen, so stellen die Gleichungen:

$$e=\frac{U'^2(V+c)}{4(U+V)^2(U-c)};\quad f=-\frac{1}{4}\frac{U'V'}{(U+V)^2}; \tag{13}$$

$$g=\frac{V^*}{U+V}+\frac{V'^2(U-c)}{4(U+V)^2(V+c)}$$

die Fundamentalgrößen des sphärischen Bildes des allgemeinsten Biegungsnetzes mit einer Schar zylindrischer nichtisotroper Kurven dar. Dabei ist $\overline{K}=-1:(U+V)^2$ das Krümmungsmaß der assoziierten Regelfläche. Wegen $f=-\frac{1}{4}\frac{U'V'}{(U+V)^2}$ folgt nach I, § 4, 5, daß die mit $\sqrt{U+V}$ multiplizierten Ebenenkoordinaten der Differentialgleichung: $\varphi_{uv}=0$ genügen, daß also:

$$X_i\sqrt{U+V}=U_i+V_i;\qquad \text{wobei } i=1,2,3,4. \tag{14}$$

Dabei muß $\sum_1^3 (U_i + V_i)^2 = U + V$ sein. Die Gleichung der allgemeinsten Flächen mit einer Schar zylindrischer nichtisotroper Biegungskurven ist also:

$$\sum_1^4 (U_i + V_i)\, x_i = 0; \quad x_4 = 1. \tag{15}$$

Dann folgt aber durch Differentiation: $\sum_1^4 U_i' x_i = 0$; $\sum_1^4 V_i' x_i = 0$; d. h.: Die Kurven $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ sind eben. Da ferner $KF = -f$ ist, so folgt:

$$\frac{LN}{D^2} F = \frac{1}{4} \frac{U'V'}{(U+V)^2} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}' \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}' = \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix},$$

woraus nach III, § 1 folgt, daß die Schmiegebenen der Parameterkurven orthogonal sind. Es gilt also:

Ist ein konjugiertes System mit einer Schar zylindrischer nichtisotroper Kurven Biegungsnetz, so liegen beide Scharen von Biegungskurven in orthogonalen Ebenen. Dann folgt aber nach III, § 4:

Die allgemeinsten Flächen mit einer Schar zylindrischer nichtisotroper Biegungskurven sind die Affingesimsflächen mit zylindrischer Abwicklung, sie sind die Rückassozierten der geraden Konoide. Ferner gilt:

Die geraden Konoide sind die einzigen Bianchischen Regelflächen, deren Erzeugende keine Minimalgeraden sind.

Ist das Biegungsnetz zweifach zylindrisch, die Fläche eine spezielle Schiebfläche, so muß die Assoziierte zwei Scharen von Geraden enthalten, also eine geradlinige Fläche zweiter Ordnung sein. Da diese F_2 sich aber auf zwei Arten als gerades Konoid darstellen lassen muß, so ist sie ein gleichseitig hyperbolisches Paraboloid. Also:

Die einzigen Schiebflächen mit nichtisotropen Biegungskurven sind die Rückassozierten des gleichseitig hyperbolischen Paraboloids, d. h. die Schiebflächen, deren erzeugende Kurven in orthogonalen Ebenen liegen.

§ 2. Die Flächen mit einer Schar isotroper Biegungskurven.

Wir haben noch den oben ausgeschlossenen Fall zu betrachten, daß eine Schar von Biegungskurven isotrop ist. Sind die Kurven $v = \text{const.}$ Minimalkurven, dann ist $E = 0$. Für die assoziierten Flächen ist dann $\overline{G} = 0$, d. h.: die Haupttangentenkurven $u = \text{const.}$ sind Minimalkurven, also Minimalgeraden. Nun sind aber alle Flächen mit einer Schar von Minimalgeraden Bianchische Flächen, denn bezieht man sie auf ihre Haupttangentenkurven, dann muß: $\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}_u' = \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}_v'$ sein, also wegen $\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}' = 0$ sowohl $\begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}'$ als auch die Krümmung $\overline{K}$ eine Funktion von u allein sein. Es gilt also:

Die Flächen mit einer Schar isotroper Biegungskurven sind die Assoziierten der Flächen mit einer Schar von Minimalgeraden.

Durch eine vorgegebene Haupttangentenkurve mit der Bogenlänge u, der Krümmung $\frac{1}{r(u)}$ und der Torsion $\frac{1}{\varrho(u)}$ gehen noch zwei Flächen mit einer Schar von Minimalgeraden, denn es gibt durch jeden Kurvenpunkt in der Schmiegebene gerade zwei Minimalstrahlen. Ist $\xi(u)$ die Gleichung der Haupttangentenkurve, dann gilt für die Punkte ihrer Schmiegebenen: $\bar{\mathfrak{x}} = \xi + v\xi_1 + w\xi_2$. Für die in den Schmiegebenen gelegenen Minimalstrahlen, welche die Leitkurve treffen, muß daher: $dv^2 + dw^2 = 0$, $w = \pm iv$

sein. Wir betrachten nur die eine Fläche, die dem positiven Zeichen entspricht. Die Gleichung der Flächen mit einer Schar von Minimalgeraden ist also:

$$\bar{\mathfrak{x}} = \xi + v\xi_1 + iv\xi_2 \quad (1)$$ [28]).

Wegen: $\bar{\mathfrak{x}}_u = \xi_1\left(1 - \frac{iv}{r}\right) + \xi_2\frac{v}{r} - \xi_3\frac{iv}{\varrho}$; $\bar{\mathfrak{x}}_v = \xi_1 + i\xi_2$ folgt für die Fundamentalgrößen erster Ordnung:

$$\overline{E} = 1 - \frac{v^2}{\varrho^2} - \frac{2iv}{r};\ \overline{F} = 1;\ \overline{G} = 0;\ \overline{D} = i. \quad (2)$$

Wegen: $\bar{\mathfrak{x}}_{uu} = \xi_1\left(iv\frac{r_u}{r^2} - \frac{v}{r^2}\right) + \xi_2\left(\frac{1}{r} - \frac{iv}{r^2} - \frac{vr_u}{r^2} - \frac{iv}{\varrho^2}\right) + \xi_3\left(\frac{iv\varrho_u}{\varrho^2} - \frac{v}{r\varrho}\right)$;

$$\bar{\mathfrak{x}}_{uv} = -\frac{i}{r}\xi_1 + \xi_2\frac{1}{r} - \frac{i}{\varrho}\xi_3;\ \bar{\mathfrak{x}}_{vv} = 0;\ \overline{\mathfrak{x}} = \frac{iv}{\varrho}\xi_1 - \frac{v}{\varrho}\xi_2 + \xi_3$$

folgt für die zweiten Fundamentalgrößen:

$$\overline{L} = -\frac{2v}{r\varrho} + \frac{iv^2}{\varrho^3} + iv\frac{\varrho_u}{\varrho^2};\ \overline{M} = -\frac{i}{\varrho};\ \overline{N} = 0. \quad (3)$$

Um die Rückassoziierten zu finden, müssen wir neue Parameter:

$$u = \bar{u};\quad v = \mu(u, \bar{v}) \quad (4)$$

einführen, so daß auch die Kurven $\bar{v} = \text{const.}$ Haupttangentenkurven werden. Da: $\overline{\overline{L}} = \overline{L} + 2\mu_u\overline{M} = 0$ sein muß, so ergibt sich wegen 4 für μ die Riccatische Differentialgleichung:

$$\left(\frac{i}{r} + \frac{\varrho_u}{2\varrho}\right)\mu + \frac{\mu^2}{2\varrho^2} - \mu_u = 0, \quad (5)$$

die sich, weil schon eine Lösung, nämlich $\mu = 0$, bekannt ist, auf die lineare Differentialgleichung:

$$\left(\frac{i}{r} + \frac{\varrho_u}{2\varrho}\right)\varphi + \frac{1}{2\varrho^2} + \varphi_u = 0 \quad (6)$$

für $\varphi = \frac{1}{\mu}$ reduziert und folglich noch 2 Quadraturen erfordert. Die zugehörige verkürzte Differentialgleichung lautet:

$$\frac{\varphi_u^*}{\varphi^*} + \left[\frac{i}{r} + \frac{\varrho_u}{2\varrho}\right] = 0;\ \text{integriert: } e^{\int\frac{i}{r}\partial u}\sqrt{\varrho}\,\varphi^* = V^*. \quad (7)$$

Setzt man: $\varphi = \psi\varphi^*$, so folgt wegen: $\varphi_u = \psi_u\varphi^* + \psi\varphi_u^*$ für ψ: $\frac{1}{2\varrho^2} + \psi_u\varphi^* = 0$;

oder: $\frac{e^{\int\frac{i}{r}\partial u}}{2\varrho\sqrt{\varrho}} + V^*\psi_u = 0$; integriert: $\int\frac{e^{\int\frac{i}{r}\partial u}}{2\varrho\sqrt{\varrho}}\partial u + V^*\psi = V.$

Setzt man: $\sqrt{\varrho}\,e^{\int\frac{i}{r}\partial u} = U_1$; $\int\frac{e^{\int\frac{i}{r}\partial u}}{2\varrho\sqrt{\varrho}}\partial u = U_2$, so folgt: $\varphi = \psi\varphi^* = \frac{V - U_2}{U_1} = \frac{1}{\mu}$.

Die Kurven $\bar{v} = \text{const.}$ sind also Haupttangentenkurven, wenn:

$$v = \mu(u, \bar{v}) = \frac{U_1(u)}{V(\bar{v}) - U_2(u)} \quad \text{ist.} \quad (8)$$

---

[28]) *G. Scheffers*, Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, 3. Auflage II (1922), S. 285.

Wegen: $\bar{\bar{\mathfrak{x}}}_{\bar{u}} = \bar{\mathfrak{x}}_u + \mu_u \bar{\mathfrak{x}}_v$; $\bar{\bar{\mathfrak{x}}}_{\bar{v}} = \mu_{\bar{v}} \bar{\mathfrak{x}}_v$; lauten die transformierten Fundamentalgrößen:

$$\begin{aligned} &\bar{\bar{E}} = \bar{E} + 2\mu_u; \quad \bar{\bar{F}} = \mu_{\bar{v}}; \quad \bar{\bar{G}} = 0; \\ &\bar{\bar{L}} = 0; \qquad \bar{\bar{M}} = \mu_{\bar{v}} \bar{M}; \quad \bar{\bar{N}} = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Da das Krümmungsmaß $\bar{K}$ bei Einführung neuer Parameter invariant bleibt, so ist: $\bar{K} = \bar{\bar{K}} = -\frac{1}{\varrho(u)^2}$, also $\left\{\begin{matrix}\overline{12}\\2\end{matrix}\right\} = +\frac{1}{2}\frac{\varrho_u}{\varrho}$.

Da: $\bar{E} = 1 - \frac{\mu^2}{\varrho^2} - \frac{2i\mu}{r}$; $2\mu_u = \frac{2i\mu}{r} + \frac{\mu^2}{\varrho^2} + \frac{\varrho_u}{\varrho}\mu$, so ist: $\bar{\bar{E}} = \bar{E} + 2\mu_u = 1 + \frac{\varrho_u}{\varrho}\mu$; $\bar{\bar{E}}_u = \left[\frac{\varrho_u}{\varrho}\mu\right]_u$; somit:

$$\left\{\begin{matrix}\overline{11}\\2\end{matrix}\right\} = \frac{\bar{\bar{E}}_u}{2\bar{\bar{F}}} - \frac{\bar{\bar{E}}\bar{\bar{F}}_u}{\bar{\bar{F}}^2} + \frac{1}{2}\bar{\bar{E}}\frac{\varrho_u}{\varrho\mu_{\bar{v}}} = \frac{\left[\frac{\varrho_u\mu}{\varrho}\right]_u}{2\mu_{\bar{v}}} - \frac{1}{\mu_{\bar{v}}^2}\left[1 + \frac{\varrho_u}{\varrho}\mu\right][\mu_{\bar{v}}]_u + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\varrho_u}{\varrho}\mu\right)\frac{\varrho_u}{\varrho\mu_{\bar{v}}}.$$

Für die Rückassoziierten x der Flächen $\bar{x}$ mit einer Schar von Minimalgeraden ergibt sich die Darstellung:

$$\mathfrak{x}_{\bar{u}} = \frac{L}{i\varrho f}\bar{\bar{\mathfrak{x}}}_{\bar{v}}; \quad \mathfrak{x}_{\bar{v}} = \frac{N}{i\varrho f}\bar{\bar{\mathfrak{x}}}_{\bar{u}}; \tag{10}$$

dabei sind die Parameterkurven $\bar{u} = u = \text{const.}$, $\bar{v} = \text{const.}$ die Haupttangentenkurven der Flächen $\bar{x}$, und L und N sind Lösungen des Systems:

$$\frac{N_u}{N} = -\frac{1}{2}\frac{\varrho_u}{\varrho}; \quad \frac{L_{\bar{v}}}{L} = \left\{\begin{matrix}\overline{11}\\2\end{matrix}\right\} N, \text{ also integriert:}$$

$$N = \frac{V}{\sqrt{\varrho}}; \quad L = \frac{1}{\sqrt{\varrho}}\int\left\{\begin{matrix}\overline{11}\\2\end{matrix}\right\} V\partial\bar{v} + U, \tag{11}$$

wobei $V(\bar{v})$, $U(u)$ willkürliche Funktionen ihres Arguments sind.
Wegen: $\bar{\bar{\mathfrak{x}}}_{\bar{u}} = \bar{\mathfrak{x}}_u + \mu_u \bar{\mathfrak{x}}_v$; $\bar{\bar{\mathfrak{x}}}_{\bar{v}} = \bar{\mathfrak{x}}_v\mu_{\bar{v}}$ folgt aus 10:

$$\mathfrak{x}_{\bar{u}} = \frac{L}{i\varrho f}\mu_{\bar{v}}\bar{\mathfrak{x}}_v; \quad \mathfrak{x}_{\bar{v}} = \frac{N}{i\varrho f}(\bar{\mathfrak{x}}_u + \mu_u\bar{\mathfrak{x}}_v). \tag{12}$$

Die Fundamentalgrößen E, F, G der Flächen, welche ein Biegungsnetz mit einer Schar isotroper Kurven enthalten, sind also:

$$E = 0; \quad F = -\frac{LN}{\varrho^2 f^2}\mu_{\bar{v}}; \quad G = -\frac{N^2}{\varrho^2 f^2}\left(1 + \frac{\varrho_u}{\varrho}\mu\right). \tag{13}$$

Wegen I, § 3, 5 [3] gilt:

Unterwirft man die Flächen mit einer Schar isotroper Biegungskurven einer Biegung mit Erhaltung des konjugierten Systems, so besteht zwischen den Torsionsradien $\varrho(c)$ der Leitkurven $\xi(c)$ der Assoziierten $\bar{S}(c)$ der Biegungsflächen $S(c)$ und dem Torsionsradius $\varrho = \varrho(\infty)$ der Assoziierten $\bar{S} = \bar{S}(\infty)$ der Ausgangsfläche $S = S(\infty)$ die Beziehung:

$$\varrho(c) = c\varrho : (c - \varrho). \tag{14}$$

Zwischen den Fundamentalgrößen $L(c)$, $N(c)$ von $S(c)$ und den Fundamentalgrößen $L = L(\infty)$, $N = N(\infty)$ der Ausgangsfläche S bestehen die Relationen:

$$L(c) = L\sqrt{\frac{c}{c - \varrho}}; \quad N(c) = N\sqrt{\frac{c - \varrho}{c}}. \tag{15}$$

Sind $\xi_c[u(c)]$ die Leitkurven der Assoziierten $\bar{S}(c)$ von $S(c)$ bezogen auf ihre Bogenlängen $u(c)$, so erhält man für die Flächen $\bar{S}(c)$ die Darstellung:

$$\bar{\mathfrak{x}}(c) = \xi_c[u(c)] + v(c)\,\xi_{c1}[u(c)] + iv(c)\,\xi_{c2}[u(c)]. \tag{16}$$

Die Rückassoziierten $S(c)$ erhält man durch Quadraturen aus:

$$\frac{d\mathfrak{x}(c)}{du(c)} = -\frac{L(c)}{i\varrho(c)F(c)K(c)}\frac{d\bar{\mathfrak{x}}(c)}{dv(c)}\frac{d\mu(c)}{d\bar{v}(c)};$$

$$\frac{d\mathfrak{x}(c)}{d\bar{v}(c)} = -\frac{N(c)}{i\varrho(c)F(c)K(c)}\left[\frac{d\bar{\mathfrak{x}}(c)}{du(c)} + \frac{d\mu(c)}{du(c)}\frac{d\bar{\mathfrak{x}}(c)}{dv(c)}\right]; \qquad \text{oder:}$$

$$\frac{d\mathfrak{x}(c)}{du(c)} = -\frac{L(c)}{i\varrho(c)F(c)K(c)}\frac{d\mu(c)}{d\bar{v}(c)}[\xi_{c1} + i\xi_{c2}];$$

$$\frac{d\mathfrak{x}(c)}{d\bar{v}(c)} = -\frac{N(c)}{i\varrho(c)F(c)K(c)}\left[\xi_{c1}\left(1 + \frac{\mu(c)^2}{2\varrho(c)^2} + \frac{\mu(c)}{2}\frac{\frac{d\varrho(c)}{du(c)}}{\varrho(c)}\right) + i\xi_{c2}\left(\frac{\mu(c)^2}{2\varrho(c)^2} + \frac{\mu(c)}{2}\frac{\frac{d\varrho(c)}{du(c)}}{\varrho(c)}\right) - i\xi_{c3}\frac{\mu(c)}{\varrho(c)}\right]. \tag{17}$$

Für die Fundamentalgrößen der Flächen $S(c)$ folgt also:

$$E(c) = 0;\quad F(c) = \frac{\frac{d\mu(c)}{d\bar{v}(c)}}{\varrho(c)^2 K(c)};\quad G(c) = -\frac{N(c)^2}{\varrho(c)^2 F(c)^2 K(c)^2}\left[1 + \mu(c)\frac{\frac{d\varrho(c)}{du(c)}}{\varrho(c)}\right]. \tag{18}$$

Die Flächen $S(c)$ sind auf die Ausgangsfläche $S = S(\infty)$ verbiegbar, wenn man die Bogenlängen $u(c)$ der Leitkurven ξ_c als Funktionen der Bogenlänge u der Leitkurve ξ, und die Parameter $\bar{v}(c)$ als Funktionen des Parameters $\bar{v}$ bestimmen kann, so daß die auf die Parameter u und $\bar{v}$ bezogenen Fundamentalgrößen einander gleich werden. Setzt man also: $u(c) = u_c(u)$; $\bar{v}(c) = \bar{v}_c(\bar{v})$, so muß sein:

$$F(c)^* = F(c)\,u'(c)\,\bar{v}'(c) = F;\quad G(c)^* = G(c)\,\bar{v}'^2(c) = G;\quad \text{also:}$$

$$\frac{1}{\varrho(c)^2 K(c)}\frac{d\mu(c)}{d\bar{v}(c)}\bar{v}'(c)\,u'(c) = \frac{1}{\varrho^2 K}\frac{d\mu}{d\bar{v}};$$

$$\frac{N(c)^2}{\varrho(c)^2 F(c)^2;\, K(c)^2}\left[1 + \frac{\frac{d\varrho(c)}{du(c)}}{\varrho(c)}\mu(c)\right]\bar{v}(c)'^2 = \frac{N^2}{\varrho^2 F^2 K^2}\left[1 + \frac{\varrho_u}{\varrho}\mu\right].$$

Da aber: $F(c)^2 = F^2 : u(c)'^2\, v(c)'^2$, und da nach (15):

$$N(c)^{*2} = v(c)'^4\, N(c)^2 = \frac{c-\varrho}{c}N^2;\quad L(c)^{*2} = u(c)'^4\, L(c)^2 = \frac{c}{c-\varrho}L^2,$$

so folgt wegen $K(c) = K$:

$$u(c)'\frac{d\mu(c)}{d\bar{v}} = \left(\frac{c}{c-\varrho}\right)^2\frac{d\mu}{d\bar{v}}; \tag{19}$$

$$\left(\frac{c-\varrho}{c}\right)^3 u(c)'^2\left[1 + \frac{\frac{d\varrho(c)}{du(c)}}{\varrho(c)}\mu(c)\right] = 1 + \frac{\varrho u}{\varrho}\mu.$$

Da man gleich von Anfang an die Haupttangentenkurven $\bar{u}(c) = \text{const.}$, $\bar{v}(c) = \text{const.}$ der Flächen $\bar{S}(c)$ vermöge der Gleichungen:

$$u(c) = \bar{u}(c);\quad v(c) = \mu(c) = U(c) : \left((\bar{v}(c) - \int_0^{u(c)}\frac{U(c)}{2\varrho(c)^2}\,\partial u(c)\right);$$

einführen kann, wobei: $U(c) = \sqrt{\varrho(c)}\,e^{i\int_0^{u(c)}\frac{\partial u(c)}{r(c)}}$, so ist die Beziehung:

$\mu(c) = \left(\frac{c}{c-\varrho}\right)^2 \frac{\mu}{u(c)'} + \varphi(u)$, die durch Integration aus der ersten Gleichung 19 folgt, nur dann erfüllt, wenn die willkürliche Funktion $\varphi(u)$ verschwindet, und wenn die Beziehungen bestehen:

$$\int_0^{u(c)} \frac{U(c)}{2\,\varrho(c)^2}\,\partial u(c) = K \int_0^{u} \frac{U}{2\,\varrho^2}\,\partial u;\quad \bar{v}(c) = K\bar{v}, \tag{20}$$

wobei $K = 1$ sein muß, weil für $c \to \infty$ die Integrale einander gleich werden müssen. Durch Differentiation folgt:

$$\frac{U(c)}{2\,\varrho(c)^2}\,u(c)' = \frac{U}{2\,\varrho^2}. \tag{21}$$

Durch Division mit $\bar{v} - \int_0^u \frac{U}{2\,\varrho^2}\,\partial u$ folgt hieraus:

$$\mu(c) = \left(\frac{c}{c-\varrho}\right)^2 \frac{\mu}{u'(c)}. \tag{22}$$

Die erste Gleichung 19 ist also infolge 20 erfüllt. Die zweite Gleichung 19 ist wegen 22 erfüllt, wenn:

$$\left(\frac{c-\varrho}{c}\right)^3 u(c)'^2 + \left(\frac{c-\varrho}{c}\right)^3 \left(\frac{c}{c-\varrho}\right)^3 \frac{\varrho u}{\varrho} = 1 + \frac{\varrho u}{\varrho}, \quad \text{also:}$$

$$u(c)' = \left(\frac{c}{c-\varrho}\right)^{\frac{3}{2}},\quad u(c) = \int_0^u \left(\frac{c}{c-\varrho}\right)^{\frac{3}{2}} \partial u \quad \text{ist.} \tag{23}$$

Dann folgt aber aus 21 für die Krümmungsradien $r(c)$ der Leitkurven ξ_c:

$$e^{i\int_0^{u(c)} \frac{\partial u(c)}{r(c)}} = e^{i\int_0^{u} \frac{\partial (u)}{r}};\quad \text{oder:}\quad \int_0^{u(c)} \frac{r(c)}{\partial u(c)} = \int_0^u \frac{\partial u}{r}.$$

Durch Differentiation folgt: $\frac{u'(c)}{r(c)} = \frac{1}{r}$, also:

$$\frac{r(c)}{r} = \frac{du}{du(c)} = \left(\frac{c}{c-\varrho}\right)^{\frac{3}{2}}. \tag{24}$$

Wegen $\frac{1}{r(c)} = \frac{d\tau(c)}{du(c)}$ ist $\frac{d\tau(c)}{du} = \frac{d\tau}{du}$, also: $\tau(c) = \tau$; also gilt: Die Krümmungsradien $r(c)$ der Leitkurven ξ_c der Assoziierten $\bar{S}(c)$ der Biegungsflächen $S(c)$ von S verhalten sich wie die Differentiale der Bogenlängen $u(c)$; zwischen den Kontingenzwinkeln $\tau(c)$ besteht die Beziehung: $\tau(c) = \tau$. Somit gilt:

Hat man ∞^1 Raumkurven $\xi_c[u(c)]$, deren Krümmungsradien $r(c)$ sich wie die Differentiale der Bogenlängen $u(c)$ verhalten, und deren Torsionsradien $\varrho(c)$ die Beziehung $\varrho(c) = \frac{c\varrho}{c-\varrho}$ erfüllen, und werden die Bogen $u(c)$ so aufeinander bezogen, daß $u'(c) = \left(\frac{c}{c-\varrho}\right)^{\frac{3}{2}}$ ist, so ergeben die Gleichungen:

$$(25)\quad \begin{aligned} \frac{d\xi(c)}{du} &= -\frac{iL}{\varrho F K}[\xi_{c1}+i\xi_{c2}]\,\mu_{\bar v};\\ \frac{d\xi(c)}{dv} &= -\frac{iN}{\varrho F K}\Big[\xi_{c1}\Big(1+\frac{\mu^2}{2\varrho^2}\frac{c-\varrho}{c}+\frac{\mu}{2}\frac{\varrho_u}{\varrho}\Big)+i\xi_{c2}\Big(\frac{\mu^2}{2\varrho^2}\frac{c-\varrho}{c}+\frac{\mu}{2}\frac{\varrho_u}{\varrho}\Big)\\ &\qquad -i\xi_{c3}\frac{\mu}{\varrho}\Big(\frac{c-\varrho}{\varrho}\Big)^{1/2}\Big], \end{aligned}$$

wobei: $\mu=\sqrt{\varrho}\,e^{i\int_0^u\frac{\partial u}{r}}:(\bar v-\int_0^u\frac{e^{i\int_0^u\frac{\partial u}{r}}}{2\varrho^{\frac{3}{2}}}\partial u)$ *ist, für jedes Wertepaar:*

$$L=\frac{1}{\sqrt{\varrho}}\int\left\{\begin{matrix}\overline{\overline{11}}\\ 2\end{matrix}\right\}V\,\partial v+U,\quad N=\frac{V}{\sqrt{\varrho}},$$

das einer beliebigen Wahl der willkürlichen Funktionen U und V entspricht, durch Quadraturen eine von einer willkürlichen Konstanten c abhängige Gruppe von Flächen, welche mit Erhaltung eines konjugierten Systems mit einer Schar von Minimalkurven aufeinander verbiegbar sind.

Nach (25) ist: $E(c)=0$; $F(c)=\frac{1}{\varrho^2 K}\mu_{\bar v}$; $G(c)=-\frac{N^2}{\varrho^2F^2K^2}\Big(1+\frac{\varrho_u}{\varrho}\mu\Big)$. Da sich die Bestimmung aller Raumkurven mit gegebener Krümmung und Torsion auf die Integration der Riccatischen Differentialgleichung: $\frac{d\sigma}{ds}=\frac{i}{2f(s)}(1-\sigma^2)-\frac{i}{r(s)}\sigma$ zurückführen läßt, so erfordert die Bestimmung der Kurven: $\xi_c\,[u(c)]$ die Integration der Riccatischen Differentialgleichungen:

$$(26)\qquad \frac{d\sigma_c}{du}=\Big(\frac{c}{c-\varrho}\Big)^{\frac{1}{2}}\frac{i}{2\varrho}(1-\sigma_c^2)-\frac{i}{r}\sigma_c.$$

Ist in einem Biegungsnetz mit einer Schar isotroper Kurven auch die zweite Schar geodätisch, so haben die krummen Haupttangentenkurven und somit auch die Leitkurve der assoziierten Fläche mit einer Schar von Minimalgeraden konstante Torsion. Somit gilt:

Die Voßflächen mit einer Schar isotroper Biegungskurven sind die Rückassoziierten der geradlinigen Flächen konstanter negativer Krümmung. Diese Voßflächen sind aufeinander verbiegbar, wenn zwischen den konstanten Torsionsradien $\varrho(c)$ der Leitkurven ξ_c der Assoziierten $\bar S(c)$ die Beziehung: $\varrho(c)=ck:(c-k)$ besteht, und wenn die Krümmungsradien $r(c)$ der Bedingung: $r(c):r=du(c):du=\Big(\frac{c}{c-k}\Big)^{\frac{3}{2}}$ genügen. Ist die Leitkurve ξ Schraubenlinie, so sind alle anderen Leitkurven ξ_c ebenfalls Schraubenlinien.

Ist in einem Biegungsnetz mit nur einer Schar isotroper Kurven auch die zweite Schar zylindrisch, dann muß sie ebenfalls isotrop sein, denn die assoziierte Fläche mit einer Schar von Minimalgeraden muß noch eine zweite Schar von Geraden enthalten, was nur möglich ist, wenn auch diese Schar aus Minimalgeraden besteht. Also:

Es gibt keine Schiebflächen mit nur einer Schar isotroper Kurven, die sich stetig in ebensolche Flächen verbiegen lassen.

Jede Fläche mit einem konjugierten System aus zwei Scharen von Minimalkurven, d. h. jede Schiebfläche isotroper Kurven, ist Minimalfläche.

Die Assoziierten der Minimalflächen sind die Flächen mit zwei Scharen von Minimalgeraden, also die Kugeln.

Als spezielle Voßfläche gestattet jede Minimalfläche eine stetige Biegung mit Erhaltung des von den isotropen Schiebkurven gebildeten konjugierten Systems. Die Biegungsgruppe der Minimalflächen lautet:

$$x = \frac{1}{2}\int (1-u^2)\, e^{ic}\, U\, \partial u + \frac{1}{2}\int (1-v^2)\, e^{-ic}\, V\, \partial v;$$

$$y = \frac{i}{2}\int (1+u^2)\, e^{ic}\, U\, \partial u - \frac{i}{2}\int (1+v^2)\, e^{-ic}\, V\, \partial v;$$

$$z = \int u\, U\, e^{ic}\, \partial u + \int v\, V\, e^{-ic}\, \partial v.$$

Kapitel V.

Flächen, welche unendlich wenig mit Erhaltung eines konjugierten Systems verbiegbar sind, oder nur eine einzige endliche Biegung mit Erhaltung eines konjugierten Systems gestatten.

§ 1. Flächen, welche unendlich wenig mit Erhaltung eines konjugierten Systems verbiegbar sind.

Eine Fläche gestattet bekanntlich dann und nur dann eine infinitesimale Biegung mit Erhaltung eines konjugierten Systems, wenn $\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}'_u = \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}'_v$ ist, wenn das sphärische Bild des konjugierten Systems zugleich das der Haupttangentenkurven einer Fläche ist. Setzt man:

$$\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}' = \frac{\partial \lg \varrho}{\partial v};\quad \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}' = \frac{\partial \lg \varrho}{\partial u};\quad \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} = \frac{\partial \lg \varphi}{\partial v};\quad \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} = \frac{\partial \lg \psi}{\partial u},$$

so ergibt die Integration der Codazzigleichungen: $L = U\varrho\varphi$; $N = V\varrho\psi$; also:

Auf infinitesimal verbiegbaren konjugierten Systemen (darunter seien die konjugierten Systeme verstanden, die infinitesimal so verbiegbar sind, daß sie konjugiert bleiben) mit gleichen Invarianten $\varphi = \psi$ erhält man die Haupttangentenkurven durch Quadraturen. Nach I, § 4, 8 gilt:

Ein infinitesimal verbiegbares konjugiertes System gestattet keine einzige endliche Biegung, bei der es konjugiert bleibt, sofern es nicht Biegungsnetz ist.

Wir erhalten weitere Eigenschaften der infinitesimal verbiegbaren konjugierten Systeme, wenn wir die Formeln für die projektive Transformation konjugierter Systeme benutzen. Stellt x_i, $x_4 = 1$ die Ausgangsfläche dar, und setzt man: $\xi_i = \sum_1^4{}^k a_{ik}\, x_k$, so ist: $\bar{x}_i = \xi_i : \xi_4$ die Gleichung der projektiv transformierten Fläche. Sind die $\left\{\begin{matrix}ik\\s\end{matrix}\right\}$ die Christoffelsymbole der Ausgangsfläche, die $\left\{\begin{matrix}\overline{ik}\\s\end{matrix}\right\}$ die der transformierten Fläche, so gilt, wenn $\xi_4 = t$ gesetzt wird [29]):

$$\left\{\begin{matrix}\overline{11}\\1\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\} - 2\frac{\partial}{\partial u}\lg t - \frac{\lambda_u}{\lambda};\quad \left\{\begin{matrix}\overline{22}\\2\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\} - 2\frac{\partial}{\partial v}\lg t - \frac{\lambda_v}{\lambda};$$

$$(1)\qquad \left\{\begin{matrix}\overline{11}\\2\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} - \frac{\lambda_v}{\lambda}\frac{L}{N};\qquad \left\{\begin{matrix}\overline{22}\\1\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} - \frac{\lambda_u}{\lambda}\frac{N}{L};$$

$$\left\{\begin{matrix}\overline{12}\\1\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} - \frac{\partial}{\partial v}\lg t;\qquad \left\{\begin{matrix}\overline{12}\\2\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} - \frac{\partial}{\partial u}\lg t.$$

---

[29]) *A. Voss*, Zur Theorie der Krümmung der Flächen, Mathematische Annalen **39** (1891), S.188—190.

Ferner gilt:

$$\overline{L} = \frac{\lambda}{t} L; \quad \overline{M} = 0; \quad \overline{N} = \frac{\lambda}{t} N.$$

Gestattet das konjugierte Netz der Ausgangsfläche eine unendlich kleine Verbiegung, bei der es konjugiert bleibt, so folgt nach 1:

$$(2) \qquad \begin{Bmatrix} \overline{12} \\ 1 \end{Bmatrix}' = -\frac{\overline{N}}{\overline{L}} \begin{Bmatrix} \overline{11} \\ 2 \end{Bmatrix} = -\frac{N}{L} \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} + \frac{\lambda_v}{\lambda} = \frac{\varrho_v}{\varrho} + \frac{\lambda_v}{\lambda} = \frac{\partial}{\partial v} \lg \varrho\lambda;$$

$$\begin{Bmatrix} \overline{12} \\ 2 \end{Bmatrix}' = -\frac{\overline{L}}{\overline{N}} \begin{Bmatrix} \overline{22} \\ 1 \end{Bmatrix} = -\frac{L}{N} \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{\lambda_u}{\lambda} = \frac{\varrho_u}{\varrho} + \frac{\lambda_u}{\lambda} = \frac{\partial}{\partial u} \lg \varrho\lambda. \qquad \text{Also:}$$

Die konjugierten Systeme, welche infinitesimal so verbiegbar sind, daß sie konjugiert bleiben, gehen durch projektive Transformation in ebensolche Systeme über.

Für die Kurven u, v eines konjugierten Systems gilt nach III, § 1:

$$\frac{1}{\tau_u r_u^2} = (\mathfrak{x}_{uuu}\, \mathfrak{x}_{uu}\, \mathfrak{x}_u) = D\,[aL + cL^3] = D\left[-\frac{L^2}{N} p + cL^3\right];$$

$$\frac{1}{\tau_v r_v^2} = (\mathfrak{x}_{vvv}\, \mathfrak{x}_{vv}\, \mathfrak{x}_v) = D\,[bN + cN^3] = D\left[-\frac{N^2}{L} q + cN^3\right], \qquad \text{wobei:}$$

$$p = \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}_u' - 2 \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}' \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}'; \qquad q = \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}_v' - 2 \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}' \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}'.$$

Es ist also für jedes konjugierte System:

$$\frac{N}{L^2} \frac{1}{\tau_u r_u^2} = DJc - p; \qquad \frac{L}{N^2} \frac{1}{\tau_v r_v^2} = DJc - q, \quad \text{wo:} \qquad J = LN.$$

Ist das konjugierte System infinitesimal so verbiegbar, daß es konjugiert bleibt, dann ist $p = q$, also:

$$\frac{N^3}{\tau_u r_u^2} = \frac{L^3}{\tau_v r_v^2}.$$

Haben die Kurven u, v weder die Krümmung Null noch die Krümmung Unendlich, dann folgt aus: $\frac{1}{\tau_u} = 0$ auch: $\frac{1}{\tau_v} = 0$, also:

Ein konjugiertes System mit einer Schar ebener Kurven ist nur dann infinitesimal so verbiegbar, daß es konjugiert bleibt, wenn auch die zweite Schar eben ist. Ist: $\frac{1}{\tau_u} = 0$ und $\frac{1}{\tau_v} = 0$, dann folgt $p = q$, also:

Jedes konjugierte System mit zwei Scharen ebener Kurven ist infinitesimal so verbiegbar, daß es konjugiert bleibt. Anderer Beweis: Da die Normalenrichtungen: $\vartheta_i = \sqrt{\varrho}\, X_i$ der konjugierten Systeme mit zwei Scharen ebener Kurven der Moutardschen Gleichung $\vartheta_{uv} = 0$ genügen, so muß die Gleichung: $\varphi_{uv} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}' \varphi_u + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}' \varphi_v - f\varphi$ für die Richtungskosinus X_i gleiche Invarianten haben, also: $\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}_u' = \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}_v'$ sein. Die konjugierten Systeme mit zwei Scharen ebener Kurven lassen sich durch wiederholte Anwendung der Projektivität und Abbildung nach parallelen Tangenten aus den Systemen ebener konjugierter Kurven gewinnen, die durch Parallelverschiebung einer ebenen Kurve längs einer andern ebenen Kurve entstehen.

In jedem infinitesimal verbiegbaren konjugierten System mit zwei Scharen ebener Kurven gilt für den Winkel ω der Schmiegebenen: $\cos\omega \sim p$. Speziell für $p = q = 0$ folgen die Sätze über Biegungsnetze III, § 1.

Beleuchtet man eine Eifläche von den Punkten einer Tangente aus, so liegen die Lichtrichtungskurven in den Ebenen durch die Tangente; die dazu konjugierten Lichtgrenzen, die Berührungskurven der von den Punkten der Tangente ausgehenden Lichtkegel, berühren im Flächenpunkt der Tangente die zu ihr konjugierte Richtung. Wegen der Konvexität der Eifläche ist das so entstehende konjugierte System bis auf den Berührungspunkt der Tangente regulär. Da das System eine Schar ebener Kurven enthält, so ist die Eifläche nur dann unendlich wenig mit Erhaltung dieses konjugierten Systems verbiegbar, wenn auch die Lichtgrenzen eben sind, also von den Ebenen durch die konjugierte Tangente ausgeschnitten werden. Da die Lichtgrenzen eben sind, wenn die Eifläche eine Kugel oder ein Ellipsoid ist, so sind Kugel und Ellipsoid unendlich wenig mit Erhaltung solcher punktierter konjugierter Systeme verbiegbar. Diese Ergebnisse, die als Folgerungen der obigen Resultate erscheinen, wurden auf anderem Wege zuerst von Herrn A. Schur in seiner Abhandlung: „Biegungen punktierter Eiflächen“ [30]) gewonnen. Die punktierten konjugierten Systeme mit zwei Scharen ebener Kurven können niemals gemeinsames konjugiertes System einer stetigen Folge von Biegungen sein, weil ja ihre Ebenen nicht orthogonal sind (vgl. III, § 1); insbesondere kann bei der Biegung der Kugel in die zyklischen Enneperflächen das Krümmungsnetz nicht, wie Herr A. Schur anzunehmen scheint, gemeinsames konjugiertes System sein, was ja auch der bekannten Tatsache [27]) widersprechen würde, daß die Gesimsflächen mit zylindrischer Abwicklung die einzigen Flächen sind, die sich stetig mit Erhaltung der Krümmungslinien verbiegen lassen.

Ein konjugiertes System mit einer Schar geodätischer Kurven ist nicht infinitesimal so verbiegbar, daß es konjugiert bleibt, sofern es nicht Biegungsnetz ist, denn wegen: $\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}' = 0$; $\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}'_u = \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}'_v$ ist: $\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}'_u = \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}'_v = 2\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}'\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}'$.

§ 2. Die Flächen, welche eine einzige endliche Biegung mit Erhaltung eines gegebenen konjugierten Systems gestatten.

Nach I, §§ 4, 7, 8 ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ein konjugiertes System eine einzige endliche Biegung gestattet, bei der es konjugiert bleibt:

$$(1)\qquad \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}' = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\lg(\varrho+1);\quad \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}' = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\lg(\varrho-1).$$

Da diese Bedingung nur vom sphärischen Bild abhängt, so gehen konjugierte Systeme, welche eine einzige endliche Biegung gestatten, bei der sie konjugiert bleiben, durch Abbildung nach parallelen Tangenten in ebensolche Systeme über. Nach IV, § 1 gestatten die infinitesimal verbiegbaren konjugierten Systeme keine einzige endliche Biegung, bei der sie konjugiert bleiben, sofern sie nicht Biegungsnetze sind. Insbesondere gilt:

Die konjugierten Systeme mit zwei Scharen ebener Kurven gestatten keine einzige endliche Biegung bei der sie konjugiert bleiben, sofern ihre Ebenen nicht orthogonal sind.

Für ein konjugiertes System mit einer Schar geodätischer Kurven ist: $\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}' = 0$.

---

[30]) *A. Schur*, Biegungen punktierter Eiflächen, Journal für reine und angewandte Mathematik **159** (1928), S. 82 ff.

Da in diesem Fall das System 1 nur dann eine Lösung haben kann, wenn ϱ und somit $\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}'$ eine Funktion von u allein ist, und da dann: $\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}'_u = 2\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}'\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}' = \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}'_v$, so gilt:

Ein konjugiertes System mit einer Schar geodätischer Kurven gestattet keine infinitesimale und keine einzige endliche Biegung mit Erhaltung des konjugierten Systems, sofern es nicht Biegungsnetz ist; insbesondere gestatten die Gesimsflächen keine infinitesimale und keine einzige endliche Biegung mit Erhaltung der Krümmungslinien, sofern sie nicht von zylindrischer Abwicklung sind.

Für $\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} = \frac{\partial \lg \varphi}{\partial v}$; $\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} = \frac{\partial \lg \psi}{\partial u}$ lauten die Codazzigleichungen:

$$\frac{Lv}{L} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\lg(\varrho+1) + \frac{\partial \lg \varphi}{\partial v};\quad \frac{Nu}{N} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\lg(\varrho-1) + \frac{\partial \lg \psi}{\partial u};$$

integriert:

$$L^2 = U^2(\varrho+1)\varphi^2;\quad N^2 = V^2(\varrho-1)\psi^2;$$

also:

$$\frac{L^2}{U^2\varphi^2} - \frac{N^2}{V^2\psi^2} = 2. \tag{2}$$

Setzt man: $\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}' = \frac{1}{2}\frac{\partial \lg \Phi}{\partial v}$; $\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}' = \frac{1}{2}\frac{\partial \lg \Psi}{\partial u}$, so folgt aus (2) wegen: $L^2 = U^{*2}\varphi^2\Phi$; $N^2 = V^{*2}\psi^2\Psi$:

$$\frac{U^{*2}}{U^2}\Phi - \frac{V^{*2}}{V^2}\Psi = 2;$$

also:

$$\frac{U^{*2}}{U^2}\Phi = \varrho+1;\quad \frac{V^{*2}}{V^2}\Psi = \varrho-1;\quad \text{somit:}$$

$$\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}' = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\lg(\varrho+1);\quad \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}' = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\lg(\varrho-1).$$

Die Bedingung 2 ist somit notwendig und hinreichend dafür, daß ein konjugiertes System eine einzige endliche Biegung gestattet, bei der es konjugiert bleibt. Unterwirft man das konjugierte System einer affinen oder projektiven Transformation, so folgt:

$$\left\{\begin{matrix}\overline{12}\\1\end{matrix}\right\}' = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\lg(\varrho+1)\lambda^2;\quad \left\{\begin{matrix}\overline{12}\\2\end{matrix}\right\}' = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\lg(\varrho-1)\lambda^2. \tag{3}$$

Durch Integration der Codazzigleichungen folgt:

$$\overline{L}^2 = \overline{U}^2(\varrho+1)\lambda^2\overline{\varphi}^2;\quad \overline{N}^2 = \overline{V}^2(\varrho-1)\lambda^2\overline{\psi}^2.$$

Da: $\overline{L} = \frac{\lambda}{t}L$; $\overline{N} = \frac{\lambda}{t}N$; $\overline{\varphi} = \frac{\varphi}{t}$; $\overline{\psi} = \frac{\psi}{t}$, so folgt: $\overline{U} = U$; $\overline{V} = V$; also:

$$\frac{\overline{L}^2}{U^2\lambda^2\overline{\varphi}^2} - \frac{\overline{N}^2}{V^2\lambda^2\overline{\psi}^2} = 2. \tag{4}$$

Die transformierte Fläche ist also dann und nur dann mit Erhaltung des konjugierten Systems verbiegbar, wenn $\lambda = \text{const.}$ ist. Eine affine Transformation mit $\lambda = \text{const.}$ ist eine Ähnlichkeit, eine projektive Transformation mit $\lambda = \text{const.}$ ist im allgemeinen nicht möglich [31]). Somit gilt:

---

[31]) *A. Voß*, Zur Theorie der infinitesimalen Biegungsdeformationen einer Fläche, Münchner Sitzungsberichte 1897, S. 261.

Gestattet ein konjugiertes System eine einzige endliche Biegung, bei der es konjugiert bleibt, so gilt dies sicher nicht für alle Systeme, die daraus durch affine oder projektive Transformation hervorgehen. Bei Affinitäten bleiben die Symbole $\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}$ und $\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}$ invariant.

Herr A. Schur behauptet in seiner Arbeit: „Über Lichtgrenztangentensysteme und mit ihnen zusammenhängende Flächentransformationen“ [32]), daß jede Fläche, die durch Abbildung nach parallelen Tangenten aus einer konisch-zylindrischen Fläche $\left[\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} = 0;\ \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} = \frac{U'}{U};\ M = 0\right]$ hervorgeht, für die also: $\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} = 0;\ \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} = \frac{U'}{U - V};$ $M = 0$ ist, eine Biegung mit Erhaltung des konjugierten Systems gestattet. Dies ist aber im allgemeinen keineswegs der Fall. Zunächst sind die Affingesimsflächen zylindrischer Abwicklung und ihre Sonderfälle die einzigen Flächen dieser Klasse, die mehr als eine, und daher unendlich viele Biegungen mit Erhaltung des konjugierten Systems gestatten. Alle Flächen, welche durch Abbildung nach parallelen Tangenten aus den konisch-zylindrischen, nicht achsenaffinen Flächen hervorgehen, die unendlich wenig mit Erhaltung des konjugierten Systems verbiegbar sind, insbesondere die Flächen, welche durch affine Transformation aus den Affingesimsflächen zylindrischer Abwicklung und ihren Sonderfällen hervorgehen, gestatten überhaupt keine endliche Biegung mit Erhaltung des konjugierten Systems. Eine Fläche F, welche durch Abbildung nach parallelen Tangenten aus einer konisch-zylindrischen Fläche hervorgeht, läßt vielmehr nur dann eine solche Biegung zu, wenn der konisch-zylindrischen Ausgangsfläche x_i diese Eigenschaft zukommt, d. h. wenn die willkürlichen Funktionen U_i und V_i der Flächengleichung: $x_i = U V_i + \int U' U_i \, \partial u$ so gewählt sind, daß: $\frac{L^2}{U^2} - \frac{N^2}{V^2 U^2} = 2$ ist.

Alle Flächen aber, die aus einer solchen Fläche F durch affine Transformation hervorgehen, also derselben Klasse angehören, gestatten überhaupt keine endliche Biegung mit Erhaltung des konjugierten Systems. Somit gilt:

Die Flächen, die durch Abbildung nach parallelen Tangenten aus den konisch-zylindrischen Flächen hervorgehen, gestatten im allgemeinen keine endliche Biegung mit Erhaltung des konjugierten Systems.

Herr A. Schur kommt offenbar infolge eines Mißverständnisses zu der unrichtigen Annahme, daß alle konisch-zylindrischen Flächen sich mit Erhaltung des konjugierten Systems verbiegen lassen. Diese Behauptung wird nämlich keineswegs, wie Herr A. Schur glaubt, in den „Lecons sur la théorie générale des surfaces“ [33]) von G. Darboux bewiesen, dort steht nämlich nur die Bemerkung, daß zwei konisch zylindrische Flächen: $x_{1i} = U V_{1i} + \int U' U_{1i} \, \partial u;\ x_{2i} = U V_{2i} + \int U' U_{2i} \, \partial u$ aufeinander verbiegbar sind, **wenn:** $\Sigma (U_{1i} + V_{1i})^2 = \Sigma (U_{2i} + V_{2i})^2;\ \Sigma V_{1i}'^2 = \Sigma V_{2i}'^2;$ ist.

[32]) *A. Schur*, Über Lichtgrenztangentensysteme und mit ihnen zusammenhängende Flächentransformationen, Mathematische Zeitschrift **24** (1926), S. 530 ff.

[33]) *G. Darboux*, Leçons sur la théorie générale des surfaces, 2. Auflage I (1915), S. 181.

Eingegangen 15. Januar 1929.

Finite groups and their geometric representation.

By *Arnold Emch* in Urbana (Illinois).

I. Introduction.

The fact that every finite group may be represented as a substitution group of a certain degree m makes it possible to construct in every case certain configurations in a projective space of $m - 1$ or lower dimensions whose points correspond uniquely to the substitutions of the group. Such configurations are representatives of the groups and are characterized by geometric properties which reflect the properties of the group. Such representations in certain particular cases are numerous and have been known for a long time. From this standpoint I have considered the symmetric group of degree m on a hyperquadric in S_{m-1} [1]). It is thus obvious that any finite group may be represented by a certain configuration (with characteristic geometric properties) on a hyperquadric. Whether such a representation would in every case be mathematically profitable is an open question. While there is thus indicated a general method of approach to the geometrical problem of finite group theory, there may be developed special methods of representation of finite groups in connection with particular problems connected with group theory, which seem to be of sufficient interest and importance to deserve attention. This is the case with the theory of triple and multiple systems in which geometric considerations are found in the literature only in a few instances [2]). It was *Kirkman* [3]) in 1844, and *Steiner* [4]) who in 1853 first stated the problem of triple systems and certain multiple systems in its most elementary aspect as it was revealed to him by the study of the configuration of the 28 double tangents of the quartic. A detailed account of this connection is given by *Noether* [5]) in an important paper which appeared in 1879. Netto pays attention to the algebric properties of triple systems and the closely associated triple equations and their groups. Since that time triple systems have been studied by a number of investigators mostly with reference to existence proofs, formation and group properties of such systems [6]).

---

[1]) Some geometric applications of symmetric substitution groups. The American Journal of Mathematics, vol. XLV (1923), pp. 192—207.

[2]) *L. Heffter*, Über das Problem der Nachbargebiete. Mathematische Annalen, vol. 38 (1891), pp. 477—508.

De Vries, Zur Theorie der Tripel-Systeme. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, vol. 8 (1894), pp. 222—226.

Über polyedrale Konfigurationen. Mathematische Annalen, vol. 34 (1889), pp. 237—246.

[3]) On a problem in combinations. The Cambridge and Dublin Mathematical Journal, vol. 2 (1847), pp. 191—204.

[4]) Kombinatorische Aufgabe, Journal für reine und angewandte Mathematik, vol. 45 (1853), pp. 181—182.

[5]) Über die Gleichungen achten Grades und ihr Auftreten in der Theorie der Kurven vierter Ordnung. Mathematische Annalen, vol. 15 (1879), pp. 89—110.

[6]) *E. Netto*, Zur Theorie der Tripelsysteme. Mathematische Annalen, vol. 42 (1893), pp. 141—152.

E. H. Moore, Concerninig triple systems. Mathematische Annalen, vol. 43 (1893), pp. 271—285.

F. M. Cole, The triad systems of thirteen letters. Transactions of the American Mathematical Society, vol. 14 (1913), pp. 1—5.

That a vast number of similar systems, for example triple systems with double couples, quadruple systems containing every triple once, in general *n-tuple* systems of various types may be formed becomes evident without much effort. There seems to be little that has been done along this line of generalization. In as much as with every well defined system of this sort there is associated a finite group which dominates it and as the number of such systems is unlimited, there exists a large class of finite groups which bear conversely the characteristics of these systems. Each triple or multiple system and couples of such may be represented by a certain spatial configuration to which is attached a related finite group. It is the purpose of this paper to show by a few simple examples how such configurations and their groups may be constructed.

II. Finite groups of given order m.

Every substitution group of order m may be represented by a simply isomorphic group of order m and degree m, i. e, by a regular group of order m. Let

$$G_m \equiv T_i = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_m \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{im} \end{pmatrix}, \qquad i = 1, 2, \dots, m$$

represent this group. If we interpret the elements a as coordinates x in a projective space S_{m-1} of $m-1$ dimensions, the G_m is evidently also isomorphic with the collineation group

$$K_m \equiv C_i \begin{cases} \varrho x_1^1 = x_{i1} \\ \varrho x_2^1 = x_{i2} \\ \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \\ \varrho x_m^1 = x_{im} \end{cases} \qquad i = 1, 2, \dots, m$$

in S_{m-1}. $(x_1^1 x_2^1 \dots x_m^1) \equiv (x_{i1} x_{i2} \dots x_{im})$ represents a point P_i in S_{m-1}. Every permutation of $x_1 x_2 \dots x_m$ represents such a point. If we write $\Phi_1 = \sum_{i=1}^{m} x_i$, $\Phi_2 = \sum_{i,k=1}^{m} x_i x_k$, then

$$\Phi = \Phi_1^2 + \lambda \Phi_2 = 0$$

is a hyperquadric in S_{m-1} which is invariant in the symmetric group $G_{m!}$ of the m elements represented as a collineation group. If (x) is a point on the hyperquadric then all other $m! - 1$ points, corresponding to as many permutations of the x's, also lie on the hyperquadric. Hence the well known

Theorem. *The $m!$ points corresponding to the symmetric group of order m lie on a hyperquadric, which is determined by a generic point (y) of S_{m-1}, and which has the form*

$$\Phi = \Phi_2(y)\, \Phi_1^2(x) - \Phi_1^2(y)\, \Phi_2(x) = 0.$$

To the substitution T_i of K_m corresponds on Φ a point P_i which is one of the $m!$ points (y) of the symmetric group. Thus are obtained on $\Phi = 0$ m points which represent the entire group. In fact there are ∞^{m-2} such agregates of m points, each of which may serve as a representative of the entire group. This may be stated as the

---

H. S. White, Triple systems as transformations, and their paths among triads. Transactions of the American Mathematical Society, vol. 14 (1913), pp. 6—13.

Louise D. Cummings, On a method of comparison for triple systems. Transactions of the American Mathematical Society, vol. 15 (1914), pp. 311—327.

H. S. White, The multitude of triad systems on 31 letters. Transactions of the American Mathematical Society, vol. 16 (1915), pp. 13—19.

S. Bays, Sur les systèmes cycliques de Steiner. Annales Sc. de L'École Normale Supérieure, 3. ser., vol. 4 (1923), pp. 55—60.

Theorem. *Every group of order m may be represented in an infinite number of ways by certain m-tuples on a hyperquadric in* S_{m-1}. Each such m-tuple is a divisor of the $m!$ points of the associated symmetric group on m elements and must have certain geometric properties which result from the structure of the group.

But this method of representation of groups may be applied to any finite group on m letters. As a starting point we choose again the symmetric group $G_{m!}$ on a hyperquadric in S_{m-1}. Let K_r be the representative collineation group of the given group. Then by the substitution of this group a generic point (y) on $\Phi = 0$ is carried into the points of a configuration on the hyperquadric which is a divisor of the $m!$ points of the symmetric group determined by (y). Thus the

Theorem. *Every group* K_r *on m letters may be represented (in an infinite number of ways) by a certain configuration of points on a hyperquadric, uniquely determined by a point* (y), *which is a divisor of the entire configuration of the* $m!$ *points representing the symmetric group, the structure of the group* K_r *is reflected by the geometric properties of the corresponding configuration.*

As a simple example consider the

Groups on four letters.

The geometric representation of the symmetric G_{24} on $(y_1 y_2 y_3 y_4)$ all, is well known.

Let the coordinate tetrahedron be $A_1(1000)$, $A_2(0100)$, $A_3(0010)$, $A_4(0001)$. The hyperquadric has the form

$$\Phi_2(y)\,\Phi_1^2(x) - \Phi_1^2(y)\,\Phi_2(x) = 0.$$

All hyperquadrics of the symmetric group (as in the general case) form a pencil which touch each other along an imaginary conic, the intersection of $\Phi_1 = 0$ and $\Phi_2 = 0$, with the common tangentcone

$$\sum_{i,k=1}^{4} (x_i - x_k)^2 = 0,$$

which has its vertex at the unit-point. The 24 points (y) of G_{24} lie 6 times on 12 lines (72 lines altogether) through the points $(1, -1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, -1)$, $(0, 1, 0, -1)$, $(1, 0, -1, 0)$, $(1, 0, 0, -1,)$ respectively, which we denote by E_{ik} and which are the intersections of $x_j = 0$ and $x_l = 0$. If i, k are any two numbers of 1, 2, 3, 4, j and l are the remaining two. They are evidently the vertices of the quadrangle cut out on the unit-plane by the faces of the coordinate tetrahedron. The diagonal points of this quadrangle are $(1, -1, -1, -1)$, $(1, 1, -1, -1)$, $(1, -1, -1, 1)$. Through every line of the quadrangle there are four planes each containing 6 of the 24 points. They correspond to each other 12 by 12 in six involutions with the E_{ik}'s as centers.

The next step is to investigate the geometric properties of the configuration corresponding to an octic subgroup of the G_{24}. There are three such G_8 in G_{24} and are formed by the substitutions which leave in turn the functions $x_1x_2 + x_3x_4$, $x_1x_3 + x_2x_4$, $x_1x_4 + x_2x_3$ invariant. These groups and the corresponding configurations on $\Phi = 0$ may be represented by the table

	(12) + (34)		(13) + (24)		(14) + (23)	
A_1	1	$y_1y_2y_3y_4$	1	$y_1y_3y_2y_4$	1	$y_1y_4y_2y_3$
A_2	(12)	$y_2y_1y_3y_4$	(13)	$y_3y_1y_2y_4$	(14)	$y_4y_1y_2y_3$
A_3	(34)	$y_1y_2y_4y_3$	(24)	$y_1y_3y_2y_4$	(23)	$y_1y_4y_3y_2$
A_4	(12) (34)	$y_2y_1y_4y_3$	(13) (24)	$y_3y_1y_4y_2$	(14) (23)	$y_4y_1y_3y_2$
A_5	(13) (24)	$y_3y_4y_1y_2$	(12) (34)	$y_2y_4y_1y_3$	(12) (34)	$y_2y_3y_1y_4$
A_6	(14) (23)	$y_4y_3y_2y_1$	(14) (23)	$y_4y_2y_3y_1$	(13) (24)	$y_3y_2y_1y_4$
A_7	(1324)	$y_3y_4y_2y_1$	(1234)	$y_2y_4y_3y_1$	(1243)	$y_2y_3y_4y_1$
A_8	(1423)	$y_4y_3y_1y_2$	(1432)	$y_4y_2y_1y_3$	(1342)	$y_3y_2y_1y_4$.

In this manner the 24 points are properly distributed in 3 octic configurations. It will suffice to consider the first of these. If we denote the points in the same order by $A_1A_2...A_8$, we find by subtracting the coordinates of A_2 from those of A_1, that the join of A_1A_2 passes through $(1, -1, 0, 0)$ or E_{12}; so do A_3A_4, A_5A_8, A_6A_7. Similarly, A_1A_3, A_2A_4, A_5A_7, A_6A_8 pass through $(0, 0, 1, -1)$ or E_{34}.

The substitutions of the G_8 either leave E_{12} and E_{34} unaltered or permute them.

Now the symmetric quadric through the octuple G_8 is

$$\Phi_2(y)\,\Phi_1^2(x) - \Phi_1^2(y)\,\Phi_2(x) = 0.$$

The quadric invariant under the G_8 has the form

$$\Phi_1^2(x) + \lambda\Phi_2(x) + \mu\psi_2(x) = 0,$$

in which $\psi_2(x) = x_1x_2 + x_3x_4$. The octuple G_8 lies on this quadric, when

$$\mu = -\frac{\Phi_1^2(y) + \Phi_2(y)}{\psi_2(y)}.$$

Hence the quadric containing the octuple and invariant under the G_8 is

$$[\Phi_1^2(x) + \lambda\Phi_2(x)]\,\psi_2(y) - [\Phi_1^2(y) + \lambda\Phi_2(y)]\,\psi_2(x) = 0,$$

or
$$\psi_2(y)\Phi_1^2(x) - \Phi_1^2(y)\,\psi_2(x) + \lambda\,\{\psi_2(y)\Phi_2(x) - \Phi_2(y)\,\psi_2(x)\} = 0.$$

The two quadrics

$$\psi_2(y)\Phi_1^2(x) - \Phi_1^2(y)\;\psi_2(x) = 0 \quad \text{and}$$
$$\psi_2(y)\Phi_2(x) - \Phi_2(y)\;\psi_2(x) = 0$$

both pass through the octuple and intersect in a quartic space curve C_4 through $P_1P_2...P_8$, which clearly also lies on the symmetric quadric $\Phi_2(y)\Phi_1^2(x) - \Phi_1^2(y)\Phi_2(x) = 0$. Hence the

Theorem. *An octuple (P) corresponding to an octic subgroup G_8 of the symmetric G_{24} on 4 letters determines a quartic C_4 on the symmetric quadric which is invariant in the G_8. Through C_4 there is a pencil of quadrics belonging to the G_8. Each of these quadrics is invariant under the G_8.*

The octuples on C_4 form a linear series g_8^1, i. e., an involution. Expressed differently the C_4 is invariant under an octic collineation group in S_3.

The points $A_1(y_1y_2y_3y_4)$, $A_2(y_2y_1y_3y_4)$, $A_3(y_1y_2y_4y_3)$, $A_4(y_2y_1y_4y_3)$ lie on the plane

$$x_1 + x_2 - \frac{y_1 + y_2}{y_3 + y_4}(x_3 + x_4);$$

$A_5(y_3y_4y_1y_2)$, $A_6(y_4y_3y_2y_1)$, $A_7(y_3y_4y_2y_1)$, $A_8(y_4y_3y_1y_2)$ on the plane

$$x_1 + x_2 - \frac{y_3 + y_4}{y_1 + y_2}(x_3 + x_4).$$

Setting $\dfrac{y_1 + y_2}{y_3 + y_4} = \lambda$ and multiplying both equations we get

$$(x_1 + x_2)^2 + (x_3 + x_4)^2 - \left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)(x_1 + x_2)\,(x_3 + x_4) = 0,$$

which represents a pencil of degenerate cones through the point $(0, 0, 1, -1) = E_{34}$, more accurately through the line of intersection of $x_1 + x_2 = 0$ and $x_3 + x_4 = 0$ as a double line, which lies, of course, in the unit-plane. This establishes the existence of a g_8^1 on the C_4 whose point-groups, belonging to the octic sub-group, are cut out by the cones of the pencil.

Geometric Representation of $G_{12} = (x_1 x_2 x_3)$ all $(x_4 x_5)$, *on a Hyperquadric in* S_4.
The 12 points corresponding to the substitutes of G_{12} are

$$\begin{array}{ll} A_1\ x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 & A_7\ x_1 x_2 x_3 x_5 x_4 \\ A_2\ x_1 x_3 x_2 x_4 x_5 & A_8\ x_1 x_3 x_2 x_5 x_4 \\ A_3\ x_2 x_1 x_3 x_4 x_5 & A_9\ x_2 x_1 x_3 x_5 x_4 \\ A_4\ x_2 x_3 x_1 x_4 x_5 & A_{10}\ x_2 x_3 x_1 x_5 x_4 \\ A_5\ x_3 x_1 x_2 x_4 x_5 & A_{11}\ x_3 x_1 x_2 x_5 x_4 \\ A_6\ x_3 x_2 x_1 x_4 x_5 & A_{12}\ x_3 x_2 x_1 x_5 x_4\,. \end{array}$$

The joins of A_1A_2, A_3A_4, A_5A_6, A_7A_8, A_9A_{10}, $A_{11}A_{12}$ all pass through (01—100).
The joins of A_1A_3, A_2A_5, A_4A_6, A_7A_9, A_8A_{11}, $A_{10}A_{12}$ pass through (1—1000).
The joins of A_1A_7, A_2A_8, A_3A_9, A_4A_{10}, A_5A_{11}, A_6A_{12} pass through (0001—1).
The joins of A_1A_6, A_2A_4, A_3A_5, A_1A_{12}, A_8A_{10}, A_9A_{11} pass through (10—100).

The 12 *points lie four times by twos on* 6 *lines concurrent in turn in four points of the unit-plane.*

The group leaves invariant the hyperquadric

$$x_4^2 + a\,x_4 x_5 + x_5^2 + b\,\psi_1^2 + c\,\psi_2 + d + (x_4 + x_5)(x_1 + x_2 + x_3),$$

in which $\psi_1 = \sum_{i=1}^{5} x_i$, $\psi_2 = \sum_{i,k=1}^{5} x_i\,x_k$,

which may be reduced to the form

$$x_5^2 + a\,x_4 x_5 + x_4^2 + b(x_4 + x_5)\,\Phi_1 + c\Phi_1^2 + d\Phi_2 = 0, \quad \text{in which}$$
$$\Phi_1 = x_1 + x_2 + x_3, \quad \Phi_2 = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1.$$

Two such hyperquadrics intersect in a surface, i. e., a quartic surface in S_4, which is invariant under the G_{12}.

We may study the character of this surface by projecting it from the point (00001) upon the space $[x_1 x_2 x_3 x_4]$. For this purpose write the surfaces in the form

$$(1) \qquad x_5^2 + (a\,x_4 + b\Phi_1)\,x_5 + x_4^2 + b\,x_4\,\Phi_1 + c\Phi_1^2 + d\Phi_2 = 0,$$
$$(2) \qquad x_5^2 + (\alpha\,x_4 + \beta\Phi_1)\,x_5 + x_4^2 + \beta\,x_4\Phi_1 + \gamma\Phi_1^2 + \delta\Phi_2 = 0,$$

and eliminate x_5. This gives

$$\begin{aligned} &[(b-\beta)\,x_4\Phi_1 + (c-\gamma)\,\Phi_1^2 + (d-\delta)\,\Phi_2]^2 \\ &+ [(a-\alpha)\,x_4 + (b-\beta)\Phi_1][(a\,x_4 + b\Phi_1)\,(x_4^2 + \beta x_4\Phi_1 + \gamma\Phi_1^2 + \delta\Phi_2) \\ &\quad - (\alpha\,x_4 + \beta\Phi_1)\,(x_4^2 + b\,x_4\Phi_1 + c\Phi_1^2 + d\Phi_2)] = 0, \end{aligned}$$

which may be reduced to the form

$$\begin{aligned} &A x_4^4 + B\,x_4^3\Phi_1 + C\,x_4^2\Phi_1^2 + E\,x_4\Phi_1^3 + G\Phi_1^4 \\ &\quad + \Phi_2(D\,x_4^2 + F\Phi_1 x_4 + H\Phi_1^3 + J\Phi_2) = 0, \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} &K(x_4 - \mu_1\Phi_1)\,(x_4 - \mu_2\Phi_1)\,(x_4 - \mu_3\Phi_1)\,(x_4 - \mu_4\Phi_1) \\ &\quad + \Phi_2(D\,x_4^2 + F\,x_4\Phi_1 + H\Phi_1^2 + J\Phi_2) = 0. \end{aligned}$$

Thus, there exist four planes through $(x_4 = 0,\ \Phi_1 = 0)$ which cut the quartic in 4 conics which lie on a cone with vertex A_4 and base $\Phi_2 = 0$. The remaining conic intersections lie on the quadric $Dx_4^2 + Fx_4\Phi_1 + H\Phi_1^2 + J\Phi_2 = 0$.

More generally each plane of the pencil $x_4 = \lambda\Phi_1$ cuts the surface in two conics (degenerate quartic) with the equation $(A\lambda^4 + B\lambda^3 + C\lambda^2 + E\lambda + G)\Phi_1^4 + (D\lambda^2 + F\lambda + H)\,\Phi_1^2\Phi_2 + J\Phi_2^2 = 0$.

It happens four times that the two conics coincide, i. e., for the roots of

$$(D\lambda^2 + F\lambda + H)^2 - 4\,J(A\lambda^4 + B\lambda^3 + C\lambda^2 + E\lambda + G) = 0.$$

The four tact conics lie on the quartic

$$(Dx_4^2 + F\Phi_1 x_4 + H\Phi_1^2)^2 - 4J(Ax_4^2 + B\Phi_1 x_4^3 + C\Phi_1^2 x_4^2 + E\Phi_1^3 x_4 + G\Phi_1^4) = 0$$

and on the double quadric

$$(Dx_4^2 + F\Phi_1 x_4 + H\Phi_1^2 + 2J\Phi_2)^2 = 0.$$

The quartic may therefore be written in the form

$$\frac{1}{4J}\left\{(Dx_4^2 + F\Phi_1 x_4 + H\Phi_1^2)^2 - 4J(Ax_4^4 + B\Phi_1 x_4^3 + C\Phi_1^2 x_4^2 + E\Phi_1^3 x_4 + G\Phi_1^4)\right.$$
$$\left. - (Dx_4^2 + F\Phi_1 x_4 + H\Phi_1^2 + 2J\Phi_2)^2\right\} = 0.$$

III. Triple systems.

1. Simple triple systems.

As systems of this sort, their description and some of their properties, at least for lower orders, are fairly well known I shall not enter into a detailed discussion of them, and present merely a few additional circumstances which seem to be worthy of notice.

It is well known that triple systems $\triangle_n^3$ on n elements exist only, and in every case, for number of the form $n = 6m + 1$, and $n = 6m + 3$. Instead of using the medium of hyperquadric or other forms of possible graphic representation we may make use of the simple device of representing the n elements by n generic points in ordinary space S_3. *Then to every triple system corresponds a certain open polyhedral configuration of triangles on these n points. To two triple systems* $\triangle_n^3$ *without a common triple corresponds a closed polyhedral configuration, whose mapping upon simple closed surfaces will be explained subsequently in case of* $n = 7$ *and* $n = 9$.

$\triangle_7^3$. For certain purposes (determination of the order of the group, etc.) it is desirable, although not necessary, to have some sort of a generalized matrix from which we may write down a triple system in a very simple and effective manner. The terms for $n = 7$, the seven elements $1, 2, \ldots\ldots, 7$ may be written in any order $a, b, \ldots\ldots, g$ in the form

$$\left\|\begin{matrix} a & b & c \\ & d & \\ e & f & g \end{matrix}\right\|$$

from which the 7 triples are immediately obtained as the (1) the first line, (2) the second column, (3) and (4), the two diagonals, (5) and (6) the first and third column together with f, (7) the triangle $b\,e\,g$; i. e., $a\,b\,c$, $b\,d\,f$, $a\,d\,g$, $c\,d\,e$, $a\,e\,f$, $c\,g\,f$, $b\,e\,g$. Each such form or „matrix" may be identified with a substitution $\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7 \\ a&b&c&d&e&f&g \end{pmatrix}$. It is easy to write down the 24 „matrices" with the central letter d unchanged which produce the same triple system. The 24 corresponding substitutions form a subgroup of order 24, and as the central d may be replaced by any of the remaining letters we get a group of $24 \cdot 7 = 168$ substitutions, the simple G_{168} of this order. As the structure of this group is well known, details of its construction by the foregoing scheme are not necessary.

There are altogether $7!:168 = 30$ distinct $\triangle_7^3$'*s* and any of the 35 triples is always common to 6 distinct $\triangle_7^3$'s. But it is not possible to form 5 distinct $\triangle_7^3$'s which together contain all of the 35 triples, as has already been established by *Cayley.* [7])

[7]) Papers, vol. 1, pp. 481—484.

$\triangle \begin{matrix}3\\9\end{matrix}$. For the generating „matrix" we may use the square arrangement

$$\left\|\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}\right\|.$$

The 12 triples obtained from the three rows, the three columns and the 6 terms of the ordinary determinant expansion form a triple system $a\,b\,c$, $d\,e\,f$, $g\,h\,i$, $a\,d\,g$, $b\,e\,h$, $c\,f\,i$, $a\,e\,i$, $a\,f\,h$, $b\,d\,i$, $c\,d\,h$, $b\,f\,g$, $c\,e\,g$ on 9 letters or numbers, in which $a, b, \ldots, i$ denote the 9 numbers $1, 2, \ldots, 9$ in any order. Thus the particular arrangement of the „matrix" is equivalent with the substitution $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\ a&b&c&d&e&f&g&h&i\end{pmatrix}$. To determine the group which leaves the triple system invariant we notice first that the $\triangle \begin{matrix}3\\9\end{matrix}$ as a whole does not change when any two rows, or any two columns are interchanged. This gives a subgroup of 36 substitutions which leave $\triangle \begin{matrix}3\\9\end{matrix}$ invariant.

But there are 11 other distinct matrices and distinct from any attached to the G_{36}, which also leave $\triangle \begin{matrix}3\\9\end{matrix}$ invariant, namely (including the first)

$$\left\|\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}\right\| \quad \left\|\begin{matrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{matrix}\right\| \quad \left\|\begin{matrix} a & e & i \\ b & f & g \\ c & d & h \end{matrix}\right\| \quad \left\|\begin{matrix} a & f & h \\ b & d & i \\ c & e & g \end{matrix}\right\|$$

$$\left\|\begin{matrix} a & b & c \\ e & f & d \\ i & g & h \end{matrix}\right\| \quad \left\|\begin{matrix} a & d & g \\ e & h & b \\ i & c & f \end{matrix}\right\| \quad \left\|\begin{matrix} a & e & i \\ f & g & b \\ h & c & d \end{matrix}\right\| \quad \left\|\begin{matrix} a & f & h \\ d & i & b \\ g & c & e \end{matrix}\right\|$$

$$\left\|\begin{matrix} a & b & c \\ f & d & e \\ h & i & g \end{matrix}\right\| \quad \left\|\begin{matrix} a & d & g \\ h & b & e \\ f & i & c \end{matrix}\right\| \quad \left\|\begin{matrix} a & e & i \\ g & b & f \\ d & h & c \end{matrix}\right\| \quad \left\|\begin{matrix} a & f & h \\ i & b & d \\ e & g & c \end{matrix}\right\|.$$

With each of these are connected as above 36 substitution which leave $\triangle \begin{matrix}3\\9\end{matrix}$ invariant. These together form all the substitutions which leave the given $\triangle \begin{matrix}3\\9\end{matrix}$ invariant, and they consequently form a G_{432} of order $36 \cdot 12 = 432$, which is known as the group of the triple equation of degree 9. There are, of course, several ways of generating this group. For instance if we set

$$S_1 = 123.456.789$$
$$S_2 = 147.258.369$$
$$S_3 = 159.267.348$$
$$S_4 = 168.249.357$$

then G_9 (S_1, S_2, S_3, S_4) is a non-cyclic Abelian group of order 9 and the G_{432} is the holomorph of G_9.

Each triple is common to 120 *distinct triple systems.*

If we consider for example the triple 123 fixed, then the remaining numbers form 6! permutations $a\,b\,c\,d\,e\,f$ each giving the second and third row in the „matrix", namely $a\,b\,c$ and $d\,e\,f$. But as these may be interchanged and a cycle of order 3 applied to each

without changing $\triangle_9^3$, there are evidently only $6!:6=120$ permutations which with 123 give distinct $\triangle_9^3$'s. Now it is clear that two triples with a common couple, for example 123 and 124, cannot belong to the same $\triangle_9^3$. Moreover every couple must occur in every $\triangle_9^3$ just once. Hence all $\triangle_9^3$'s can be classified in various ways into 7 classes of 120 triple systems, each class being characterised by a common triple. Thus 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129 are each common to 120 $\triangle_9^3$'s. Thus these are altogether $7 \cdot 120 = 840$ distinct triple systems on 9 elements. This checks up with the fact that $9!:432 = 840$.

Now in case of 9 the remarkable circumstance presents itself that *all* 84 *triples may be distributed completely and each only once in* 7 *triple systems. This may be called a complete set of triple systems.*

That this is not always possible is clear from the case of $n = 7$. Such a complete set is for example obtained from the 7 matrices

$$\left\|\begin{matrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{matrix}\right\| \quad \left\|\begin{matrix}1&2&4\\3&5&9\\7&6&8\end{matrix}\right\| \quad \left\|\begin{matrix}1&2&5\\3&7&8\\9&4&6\end{matrix}\right\| \quad \left\|\begin{matrix}1&2&6\\3&4&7\\8&5&9\end{matrix}\right\| \quad \left\|\begin{matrix}1&2&7\\3&6&8\\4&9&5\end{matrix}\right\| \quad \left\|\begin{matrix}1&2&8\\4&3&9\\5&7&6\end{matrix}\right\| \quad \left\|\begin{matrix}1&2&9\\7&3&6\\8&4&5\end{matrix}\right\|.$$

As there are 840 distinct $\triangle_9^3$'s, and from the fact that there exists at least one complete set, it is easily seen that a great number of such complete sets may be formed and that each $\triangle_9^3$ may belong to more than one complete set. So far I have not been able to establish necessary and sufficient conditions on the number n for which complete sets of triple systems are possible. The original complete sets of $\triangle_9^3$'s were found by trial.

2. Triple systems with double couples.

n elements form $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$ triples and $\frac{1}{2}n(n-1)$ couples. Let $\triangle$ be a triple system containing every couple twice and let x be the number of triples of the system. As every triple contains 3 couples

$$3x = \frac{2 \cdot n(n-1)}{2} = n(n-1),$$

$x = \frac{1}{3}n(n-1)$. Hence n must have either the form $n = 3m$, or $n = 3m+1$, and $x = m(3m-1)$, or $x = (3m+1)m$.

For $m = 1$ we get in the first case $n = 3$, $x = 2$, a triangle 123 counted twice; in the second case $n = 4$, $x = 4$, or the tetrahedron 123, 124, 134, 234. The groups which leave this dyhedral and tetrahedron invariant are of course the dyhedral group on three letters, or the symmetric group, and the tetrahedral group.

For $m = 2$, we have for the two cases $n = 6$, $x = 10$ and $n = 7$, $x = 14$.

In general, for $m = 2\mu$

$$n = 6\mu, \qquad x = 2\mu(6\mu-1),$$
$$\text{or} \quad n = 6\mu+1, \quad x = 2\mu(6\mu+1).$$

For $m = 2\mu + 1$,

$$n = 6\mu + 3, \qquad x = 2(2\mu + 1)(3\mu + 1),$$
$$\text{or} \quad n = 6(\mu + 1), \qquad x = 2(2\mu + 1)(3\mu + 2).$$

In case of an even n, i. e., $n = 6\mu$, or $n = 6(\mu + 1)$ we have triple systems with double couples which form closed surfaces. In case of odd numbers, $n = 6\mu + 1$, $n = 6\mu + 3$, we have the same number as in triple systems with single couples, but twice the number of triples. Hence if we take two such triple systems with no common triple we have a triple system with double couples.

Thus when $\mu = 1$, $n = 7$, $x = 14$. When $\mu = 1$, in the other case, $n = 6\mu + 3 = 9$, $x = 24$.

3. Triple system of order 7 with double couples.

Such a system may be constructed by taking two ordinary triple systems of order 7 with single couples without a common triple. For example

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ & 4 & \\ 5 & 6 & 7 \end{matrix} \right\| \equiv \begin{matrix} 1\,1\,1\,2\,2\,3\,3 \\ 2\,4\,5\,4\,5\,4\,6 \\ 3\,7\,6\,6\,7\,5\,7 \end{matrix}$$

$$\left\| \begin{matrix} 2 & 1 & 6 \\ & 4 & \\ 7 & 3 & 5 \end{matrix} \right\| \equiv \begin{matrix} 1\,1\,1\,2\,2\,3\,4 \\ 2\,3\,5\,3\,4\,5\,6 \\ 6\,4\,7\,7\,5\,6\,7\,. \end{matrix}$$

Each system is invariant in a simple G_{168}. There are 7 substitution which permute the two systems, namely

$$S_1 = (27)(35)(46) \text{ leaves } (1)$$
$$S_2 = (15)(34)(67) \quad ,, \quad (2)$$
$$S_3 = (16)(25)(47) \quad ,, \quad (3)$$
$$S_4 = (12)(36)(57) \quad ,, \quad (4)$$
$$S_5 = (14)(26)(37) \quad ,, \quad (5)$$
$$S_6 = (17)(45)(23) \quad ,, \quad (6)$$
$$S_7 = (13)(24)(56) \quad ,, \quad (7).$$

Then the product of each of these is a cyclic substitution of order 7 and all these products are the powers of one of these. For example

$$S_1 S_2 = (1\ 5\ 4\ 7\ 2\ 6\ 3) = T$$
$$S_3 S_5 = (1\ 2\ 5\ 6\ 4\ 3\ 7) = T^4.$$

T and its powers transform the two triple systems into themselves. Hence this is a sub-group

$$G_{14} = 1, S_1, \ldots, S_7, T, T^2, \ldots, T^6,$$

which leaves the triple system $\triangle \frac{2}{7}$ with double couples invariant.

If we let $1, 2, \ldots, 7$ represent generic points in a space of three dimensions, so that each triple is represented by a triangle, then the two systems form a closed surface, such that at each of the 21 couples there are two adjacent triangles. This surface can be developed in the manner indicated by the Fig. 1a and then, by uniting the edges 17, Fig. 1b, formed into a cyclinder. By deformation the upper rim can be shifted in a clockwise direction, so that corresponding equal numbers are in generatrices of the deformed cylinder. Then the cylinder can be deformed into a closed torus, by uniting equal numbers. By joining the centers of the triangles as indicated in the figure we

obtain 7 hexagons on the torus with the seven points as centers. For example, the centers of the triangles 134, 147, 175, 156, 162, 123 form a hexagon with center 1. The substitution S_1 leaves 1 invariant and permutes the sides of the hexagon cyclically 156, 162, 123, 134, 147, 175. The substitution T changes the hexagon into the hexagon with

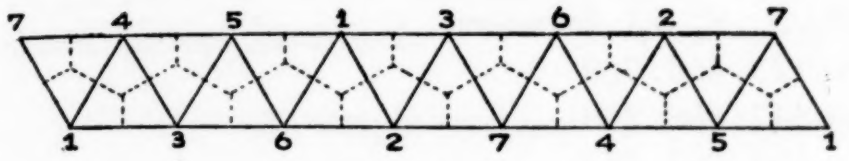

Fig. 1a.

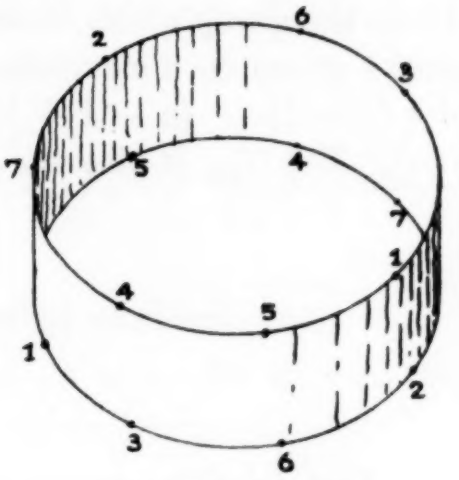

Fig. 1b.

center (5) : 517, 572, 524, 543, 536, 561. The mapping process of the polyhedron of 14 triangles upon a torus is also verified by the formula

$$k = V + F - S = 7 + 14 - 21 = 0.$$

Moreover $2 - k = 2 - 2p$, $p = 1$.

The hexagon with 1 as a center has the cycle $U = (3\ 4\ 7\ 5\ 6\ 2)$ of order 6, which interchanges the sets of triple systems as follows

1 1 1 3 3 4 4	1 1 1 3 3 4 7
3 7 6 7 6 7 2	3 4 6 4 7 6 2
4 5 2 2 5 6 5	2 7 5 5 6 2 5.

Now the powers of U are

$$U_2 = (347562)$$
$$U_3 = (376)\,(452)$$
$$U_4 = (35)\,(46)\,(72)$$
$$U_5 = (367)\,(425)$$
$$U_6 = (326574)$$
$$U = 1.$$

Thus the entire group leaving the polyhedron and in particular the polyhedron of 7 hexagons on the torus invariant is

$$(S_1, S_2, \ldots, S_7)\,(1, T)\,(1, U, U^2) = G_{42},$$

as is well known [8]).

4. Triple systems of order 9 with double couples.

The triple system obtained from

$$\left\|\begin{matrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{matrix}\right\| \equiv \begin{matrix}1\,1\,1\,1\,2\,2\,2\,3\,3\,3\,4\,7\\ 2\,4\,5\,6\,4\,6\,5\,5\,4\,6\,5\,8\\ 3\,7\,9\,8\,9\,7\,8\,7\,8\,9\,6\,9\end{matrix}$$

has a group which is doubly transitive, since 1, 2 may be replaced by any two other letters, say 5 and 8: $\left\|\begin{matrix}5 & 8 & 2\\ 1 & 4 & 7\\ 9 & 3 & 6\end{matrix}\right\|$.

[8]) *Brahana*, Regular Maps on an Anchor Ring. Am. Journ. of Mathematics, vol. XLVIII (1926), Nr. 4, pp. 225—240.

Or we have the substitution (154) (283) (796) which leaves the triple system invariant. Moreover the substitutions which leave 1, 2 invariant also leave 3 invariant and form a group of order 6

$$1, (47)(58)(69), \quad (456)(798), \quad (465)(789), \quad (59)(67)(48), \quad (68)(49)(57).$$

Hence the group which leaves the triple system invariant is a G_{432} of order $9 \cdot 8 \cdot 6 = 432$, since a group on n elements which is k-fold transitive has the order equal to the product of $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ and the order of the group which leaves k of the elements fixed. The G_{432} is also the holomorph of the non-cyclic Abelian group Γ_9 of order 9.

$$\Gamma_9(S_1, S_2, S_3, S_4) \text{ in which}$$
$$S_1 = 123.456.789$$
$$S_2 = 147.258.369$$
$$S_3 = 159.267.348$$
$$S_4 = 168.249.357.$$

Two triple systems $\triangle \begin{matrix} 3 \\ 9 \end{matrix}$ without a common triple form a closed surface with three double vertices:

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{matrix} \right\| \equiv \begin{matrix} 1\,1\,1\,1\,2\,2\,2\,3\,3\,3\,4\,7 \\ 2\,4\,5\,6\,4\,5\,6\,4\,5\,6\,5\,8 \\ 3\,7\,9\,8\,9\,8\,7\,8\,7\,9\,6\,9 \end{matrix}$$

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 9 \\ 7 & 6 & 8 \end{matrix} \right\| \equiv \begin{matrix} 1\,1\,1\,1\,2\,2\,2\,3\,3\,4\,4\,7 \\ 2\,3\,5\,6\,3\,5\,7\,4\,5\,5\,8\,6 \\ 4\,7\,8\,9\,8\,6\,9\,6\,9\,7\,9\,8. \end{matrix}$$

The surface can be dissected and mapped on a rectangle, Fig. 2, then, as in Fig. 1b, on a cylinder, and finally on a torus.

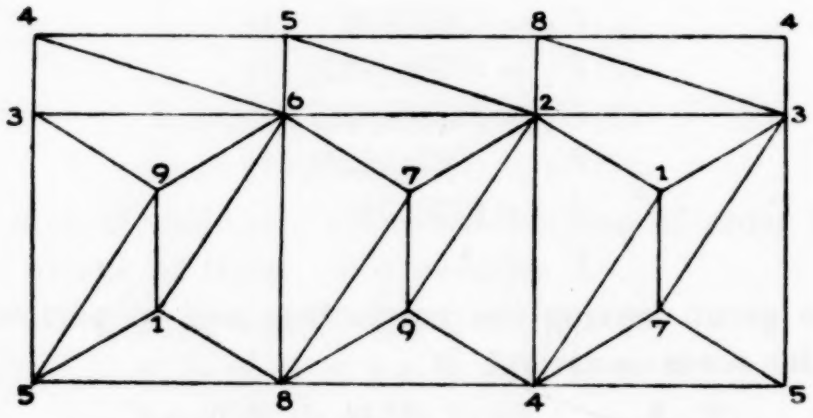

Fig. 2.

There is to be noticed this peculiarity in the polyhedral configuration for $n = 9$, that the three vertices 1, 7, 9 are double vertices, each with two distinct cycles of triangles. By Euler's formula

$$k = V - S + F = (6 + 3 \cdot 2) - 36 + 24 = 0, \text{ so that } 2 - k = 2$$

is the order of connectivity.

From the rectangular figure it is apparent that the cylindrical configuration with the edges 534 joined is left invariant by the cylic substitutions (rotations around axis of cylinder)

$$(458)(236)(197) = T;$$

moreover by

$$S_1 = (28)\,(35)\,(46)\,(79)$$
$$S_2 = (17)\,(25)\,(34)\,(68)$$
$$S_3 = (19)\,(38)\,(56)\,(24)\,.$$

Now

$$S_1S_3 = T = (236)\,(458)\,(719)$$
$$S_1S_2 = (263)\,(485)\,(917) = T^2$$
$$S_2S_3 = (791)\,(263)\,(485) = T^2\,.$$

Hence there is a non-cyclic group G_6 of order 6 $(1, T, T^2, S_1, S_2, S_3)$ which leaves the closed surface invariant.

5. Triple systems of even order with double couples.

The simplest case of this sort is for $n = 6\mu$, $\mu = 1$, or $n = 6$, with $x = 2\mu\,(6\mu - 1) = 10$.

Such a system is for example

1 2 3	2 3 5
1 3 4	3 4 6
1 4 5	4 5 2
1 5 6	5 6 3
1 6 2	6 2 4,

which form a closed surface as shown when mapped on a plane in Fig. 3. It is unilateral and can be mapped on a projective plane. The formula gives

$$V - S + F = 10 + 6 - 15 = 1 = k,$$

or $2 - k = 1$ for the order of connectivity. The substitutions which leave the surface in its composition of triples invariant are the cycles of order 3 which rotate figure 3 about its center. Such a cycle is 123.465, 132.456. But every triple may be chosen as the center, thus we have 10.2 such substitutions. Then there are cycles of order 5 which leave one point invariant, for example 1, i. e., (23456), (24635), (25364), (26543), or $6 \cdot 4 = 24$ such substitutions. Finally there are 15 substitutions of order 2, each forming a spear head like (13) (24), or (16) (34), (16) (25). Hence there are altogether $1 + 15 + 20 + 24 = 60$ substitutions which leave the triple system invariant. *If we join the centers of the five triangles around each vertex we obtain the unilateral surface mapped into* 6 *pentagons, i. e., a unilateral polyhedron of* 6 *pentagons on the projective plane and* 10 *vertices is left invariant by the icosahedral group.*

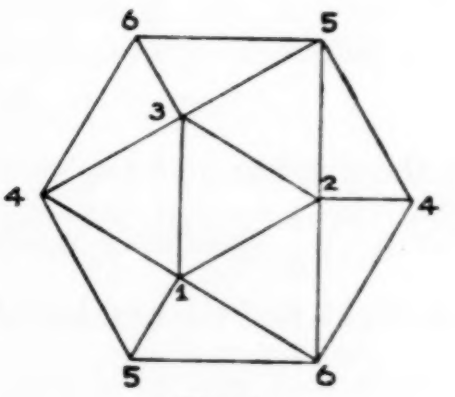

Fig. 3.

Considering the remaining 10 triples, they form also a triple system with double couples

1 2 4	2 4 3
1 4 6	4 6 5
1 6 3	6 3 2
1 3 5	3 5 4
1 5 2	5 2 6

and which is left invariant by the same icosahedral group. As can easily be verified, each triple is common to six distinct triple systems. With every triple system is asso-

ciated the complementary triple system formed by the other 10 of the total of 20 triples. In a triple system and its complement all 20 triples are contained. Hence there are altogether 12 distinct triple systems and in this complex each triple is contained just 6 times.

IV. Multiple systems.

1. Systems $\triangle \begin{matrix} k \\ n \end{matrix}$.

n elements $1, 2, 3, \ldots, n$ form $\binom{n}{k}$ k-tuples and $\binom{n}{k-1}$ $(k-1)$-tuples. *It is proposed to form a system* $\triangle \begin{matrix} k \\ n \end{matrix}$ of k-tuples *with the property that it contain eachs* $(k-1)$*-tuple just once.*

Let x be this number, then since every k-tuple contains

$$k(k-1) \text{ tuples, } kx = \binom{n}{k-1}, \quad \text{or} \quad x = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(k-1)k},$$

which must be an integer. The condition that this be an integer is however not sufficient. Ley y be the number of k-tuples of $\triangle \begin{matrix} k \\ n \end{matrix}$ containing the letter 1. Then all $(k-1)$-tuples of $\triangle \begin{matrix} k \\ n \end{matrix}$ containing the letter 1 are in these k-tuples. A $(k-2)$-tuple formed from the remaining $n-1$ letters cannot appear in more than one of the y k-tuples. On the other hand each of these $(k-2)$-tuples is contained in the y k-tuples. Thus in each of the y k-tuples, there are $\binom{k-1}{k-2}$ $(k-2)$-tuples. Hence

$$y \cdot \binom{k-1}{k-2} = \binom{n-1}{k-2}, \qquad \text{or}$$

$$y = \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k+2)}{(k-1)(k-2)\cdots 2}$$

is the number of k-tuples of $\triangle$ with a given letter just once in each of the y k-tuples. For a $\triangle \begin{matrix} k \\ n \end{matrix}$ system, y must be an integer which is another necessary condition. Next we might find the number of k-tuples so that each contain a given couple ik, and so forth.

2. $\triangle \begin{matrix} 4 \\ n \end{matrix}$.

To illustrate this, take $k = 4$, then

$$x = \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} \qquad y = \frac{(n-1)(n-2)}{3\cdot 2}.$$

In this case $n-3$ elements which form quadruples with ik must form $\frac{1}{2}(n-2)$ couples which with ik form all possible distinct triples each containing ik. From this follows that n must be even. Thus $n = 2m$, and $y = \frac{1}{3}(m-1)(2m-1)$, and either $m = 3\mu + 1$, or $m = \frac{1}{2}(3\mu + 1)$. In the latter case $\mu = 2r + 1$ and $m = 3r + 2$.

For quadruple systems of order n we have therefore either $n = 6\mu + 2$, *or* $n = 6\mu + 4$, *and the number of quadruples in* $\triangle \begin{matrix} k \\ n \end{matrix}$ *is accordingly* $x = \frac{1}{2}(3\mu + 1)(6\mu + 1)$, $x = \frac{1}{2}(3\mu + 2)(2\mu + 1)(3\mu + 1)$. *In such a system each element occurs* $\mu(6\mu + 1)$ *or* $(2\mu + 1)(3\mu + 1)$ *times.*

3. Quadruple systems of lowest order $\triangle \begin{matrix} 4 \\ 8 \end{matrix}$.

Next to the quadruple system on 4 elements which consists of one quadruple 1234, containing 4 triples 123, 124, 134, 234, and which is left invariant by the symmetric group on 4 elements, the quadruple systems of lowest order can be formed with 8 elements, such that each system contains 14 quadruples and each possible triple once, and every couple 3 times, and each letter 7 times.

It is not difficult to devise a graphical scheme to establish such quadruple systems. One is to number the vertices of a cube from 1 to 8 in any order. Then the quadruples of the system consist first of 6 faces, second of the 6 rectangles each determined by two opposite edges, third by the two tetrahedrons inscribed in the cube.

1 4 1 2 1 3 1 3 2 1 1 2 2 1
2 6 5 3 2 4 2 5 3 4 3 5 4 3
3 7 6 4 6 5 4 6 6 5 4 7 5 7
5 8 7 8 8 7 7 8 7 8 6 8 6 8.

The problem now is to determine the order of the group of degree 8 which will permute the quadruples of the system, in which a quadruple is defined as a set of four numbers irrespective of the order in which they are written. In the first place it is evident that the octahedral group written on 8 letter leaves the system invariant and hence is a subgroup of the group in question. Moreover as any three letters on the cube can be replaced by any three other letters and the remaining one so distributed over the remaining vertices so as to give rise to the same quadruple systems the group will be triply transitive. The substitutions of the group which leave 3 letters unchanged, for instance 123 also must leave 5 unchanged. These are 1, (46) (78), (47) (68), (48) (67), which form a sub-group of order 4. Hence according to a well known theorem that the order of a group of degree n which is k-fold transitive is equal to the product of $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ and the order of the group which leaves k elements unchanged, the order of the group of the quadruple system is

$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 = 1344.$$

This order may also be obtained by establishing the number of distinct quadruple systems. As every triple must be in a system,

1234, 1235, 1236, 1237, 1238

must belong to different quadruple systems. The problem then is to find how many quadruple systems can be formed with each of those quadruples fixed. Considering 1235, for example, we can form 24 permutations with 4678, each of which, with 1235, defines a quadruple system. But any two successive transpositions of different letters, like (47) (68), leaves the quadruple system invariant. As there are 4 such double transpositions, there are 6 distinct substitutions, (48), (67), (47), (68), (78), (46) which will give three distinct quadruple systems. Thus either (46), (47), (48), or (78), (68), (67), give three distinct systems; likewise the product of any two, i. e., (46) (47), (47) (48), (48) (46) three more, i. e. altogether 6 quadruple systems associated with 1235. Thus 4876 is obtained by the substitution (78) (67) or (47) (68). (46) (47) from 4768; likewise 4687 from 4768 by (67) (87) or (678). As there are altogether 8! substitutions and 30 distinct quadruple systems, each quadruple must be invariant in $8! : 30 = 1344$ substitutions, which form the above G_{1344}.

As to the structure of this group it contains a

$$G_8 \left\{ \begin{array}{l} (1) \\ (12)\,(35)\,(47)\,(68) \\ (13)\,(25)\,(46)\,(78) \\ (15)\,(23)\,(48)\,(67) \\ (18)\,(26)\,(37)\,(45) \\ (16)\,(28)\,(34)\,(57) \\ (17)\,(24)\,(38)\,(56) \\ (14)\,(27)\,(36)\,(58), \end{array} \right.$$

a

$$G_8' \left\{ \begin{array}{l} (1253,\,(48) \\ (15)\,(23) \\ (1352)\,(48) \\ (12)\,(35) \\ (23)\,(48) \\ (13)\,(25) \\ (15)\,(48), \end{array} \right.$$

a $\quad G_7 \quad (1234587)$ cyc;

a $\quad G_3 \quad (235)\,(478)$ cyc;

moreover the subgroups

$$\begin{aligned} G_{64} &= G_8 \cdot G_8' \\ G_8 \cdot G_7 &= G_{56} \\ G_8 \cdot G_3 &= G_{24} \\ G_7 \cdot G_3 &= G_{21} \\ G_8 \cdot G_7 \cdot G_3 &= G_{168} \text{ (not simple).} \end{aligned}$$

4. Configuration of two quadruple systems without a common quadruple.

If we interpret the eight elements as eight points in space of four dimensions, every quadruple will be represented by a tetrahedron. Two quadruple systems without a common quadruple can be joined so that each face (triple) of the fourteen tetrahedrons in one system will coincide with the same triple-face of the tetrahedron in the second system in which it occurs. In this manner we obtain a closed hypersurface P_{28} in S_4 bounded by 28 tetrahedral cells.

If in an S_n, there are for a polyhedron r_0 vertices, r_1 edges, r_2 faces, r_3 cells, r_4 four-spaces bounding, etc., then for an Eulerian polyhedron

$$1 - r_0 + r_1 - r_2 + r_3 + \cdots + (-1)^{n-1} r_{n-1} = 0.$$

Here r_{n-1}, the number of $(n-1)$-spaces bounding the polyhedron, is 1. Now for our 28 cells in S_4 we have

$$1 - 8 + 28 - 56 + 28 - 1 = -8.$$

Hence the 28 cells in S_4 does not belong to the ordinary polytope.

The cells of a P_{28} may be represented for example by

$$Q_{14} \left\{ \begin{array}{l} 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 2\ 2\ 2\ 2\ 3\ 3\ 4 \\ 2\ 2\ 2\ 3\ 3\ 4\ 5\ 3\ 3\ 4\ 5\ 4\ 5\ 6 \\ 3\ 4\ 6\ 4\ 7\ 5\ 6\ 4\ 6\ 5\ 7\ 5\ 6\ 7 \\ 5\ 7\ 8\ 6\ 8\ 8\ 7\ 8\ 7\ 6\ 8\ 7\ 8\ 8 \end{array} \right.$$

$$Q'_{14}\left\{\begin{array}{l} 1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,3\,4\,2\,2\,2\,2\,3 \\ 2\,3\,5\,3\,4\,2\,2\,4\,5\,3\,5\,3\,4\,6 \\ 4\,5\,6\,4\,6\,3\,7\,5\,7\,5\,6\,4\,6\,7 \\ 5\,7\,8\,8\,7\,6\,8\,6\,8\,8\,7\,7\,8\,8, \end{array}\right.$$

so that

$$P_{28} = Q_{14} + Q'_{14},$$

in which Q_{14} and Q'_{14} are two quadruple systems without a common quadruple. The problem is to find the group of degree 8 which will leave P_{28} invariant. There are substitutions which leave any two elements in Q_{14} and the same two elements in Q'_{14} fixed and permute Q_{14} and Q'_{14}; for example

$S = (25)\,(34)\,(18)$ which leaves (1) and (7),

$T = (37)\,(46)\,(58)$ which leaves (1) and (2),

$U = (13)\,(68)\,(27)$ which leaves (4) and (5)

invariant and also permutes Q_{14} and Q'_{14}. The product of any such two substitutions is a substitution which leaves each Q_{14} and Q'_{14} invariant, for example

$$ST = (2847365)$$

$$SU = (134)\,(257).$$

Thus for each element there is a cycle of order 7 which leaves this element and each Q_{14} and Q'_{14} invariant. It is seen that the substitutions of the group which leave P_{28} invariant, are of two kinds: those that permute Q_{14} and Q'_{14} and those that leave both Q_{14} and Q'_{14} invariant. Another substitution which leaves (1) and (2) fixed and permutes Q_{14} and Q'_{14} is $W = (368745)$, for which $W^2 = (384)\,(675)$, $W^3 = (37)\,(46)\,(58) = T$. $SUT = (17285364)$ is a substitution of order 8 which permutes Q_{14} and Q'_{14}. $(SUT)^2 = (1256)\,(3478)$ and $(SUT)^4 = (15)\,(26)\,(37)\,(48)$ are substitutions which transform Q_{14} and Q'_{14} into themselves. Hence there are operators of order 2, 3, 4, 7 which transform Q_{14} and Q'_{14} into themselves, and operators of order, 2, 6, 8 which permute Q_{14} and Q'_{14}.

The group is again triply transitive and the substitutions which leave three elements, say (1), (2), (3), invariant cannot also leave (5) and (6) invariant (outside of identity) hence 5 and 6 must be permuted, likewise 7 and 8, but these assumptions lead to contradictions, so that the only substitutions which leave 1, 2, 3, in $Q_{14} + Q'_{14}$ invariant is identity. Hence the group leaving P_{28} invariant is of order $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 1 = 336$. The odd substitutions of this group permute Q_{14} and Q'_{14} while the even substitutions form the simple G_{168} which leaves both Q_{14} and Q'_{14} invariant.

There is

$$G_{336} = (1, C, C^2, \ldots)\,(1, A, A^2, \ldots)\,(1, B, B^2, \ldots),$$

where

$$A = (285743),\ B = (1234587),\ C = (17285364).$$

The orders of A and C are 6 and 8 respectively. The product $C^\alpha A^\beta$ leaves Q_{14} and Q'_{14} invariant, when $\alpha + \beta = 2m$.

As $A^8 = 1$, $C^6 = 1$, we may solve this equation for $\alpha + \beta \leqq 12$, $\alpha \leqq 8$, $\beta \leqq 6$, and find easily 24 solutions, including identity.

Hence there are 24 substitutions of the form $C^\alpha A^\beta$ *which leave* $\triangle \begin{matrix} 8 \\ 4 \end{matrix}$ and $\triangle' \begin{matrix} 8 \\ 4 \end{matrix}$ *invariant, consequently leave the configuration* $\triangle \begin{matrix} 8 \\ 4 \end{matrix} \triangle' \begin{matrix} 8 \\ 4 \end{matrix}$, *or the polyhedron* P_{28} *in* S_4 *invariant.*

That configurations admitting of finite groups are not limited to the types $\triangle \begin{matrix} k \\ n \end{matrix}$ *will appear from the following example.*

5. A certain quadruple system on 16 elements.

It is proposed to construct a quadruple system on 16 elements 1, 2, . . ., 16 such that every element occurs just 6 times, i. e., in six quadruples of the system.

Let x be the number of quadruples, then there are $4x$ elements in the system. But as every element occurs in six quadruples, there must be $4x/6 = 16$ and $x = 24$. Thus such a system must have 24 quadruples. Such a system is for example

1 2 3 4	1 5 4 8	5.9.12.8	1.4.16.13
5 6 7 8	2 6 7 3	9.13.16.12	1.2.14.13
9.10.11.12	8.12.11.7	10.14.15.11	1.5.9.13
13.14.15.16	12.16.15.11	6.10.11.7	2.3.15.14
1 5 6 2	5.9.10.6	7.11.15.3	6.10.14.2
8 7 3 4	9.13.14.10	3.16.15.4	8.4.16.12 .

There are exactly 32 couples each of which occurs exactly 3 times in the system. The 24 quadruples may be grouped into 8 octuples

1.2.3.4	5.6.7.8	9.10.11.12	13.14.15.16
5.6.7.8	9.10.11.12	13.14.15.16	1. 2. 3. 4
8.4.1.5	5.6.2.1	6.10.14.2	8.7.3.4
12.16.13.9	10.14.13.9	7.11.15.3	12.11.15.16 ,

so that every octuple contains exactly 6 of the quadruples of the systems. But the 48 quadruples thus obtained are two by two equal, so that there are only the 24 original distinct quadruples. Now between the number of elements, couples, quadruples and octuples exists the identity

$$1 - 16 + 32 - 24 + 8 - 1 = 0 ,$$

which is Euler's formula for the 8-cell or cube in four dimensions. Geometrically this follows from the following consideration. The 16 elements may be represented by 16 generic points in Euclidean four space. By a continuous deformation of space, more precisely by a transformation of at least the second order

$$\varrho\, x_i' = \frac{\sum_{k,l=1}^{4} a_{ikl}\, x_k\, x_l + d_k\, x_k + b_i}{\sum_{k,l=1}^{4} a_{5kl}\, x_k\, x_l + c_k\, x_k + d} , \qquad i = 1, 2, 3, 4 ,$$

depending on 74 effective constants, 16 generic points, determined by $4 \cdot 16 = 64$ constants may always be transformed into the 16 vertices of an 8-cell. Thus when they are transformed in the order as indicated by the above quadruple system, the elements, couples, quadruples, and octuples of the system form the vertices, edges, faces and cubes of an 8-cell in four dimensions. The octahedral group attached to each cube of the 8-cell leaves this cube invariant and induces a definite transformation of the remaining

cubes among themselves, thus transforming the whole 8-cell into itself. With each cube there is associated such an octahedral group. Hence there are $8 \cdot 24 = 192$ movements of the 8-cell into itself. Or the group associated with the quadruple system is a G_{192}, which is well known as the polyhedral group which leaves the 8-cell invariant.

Every permutation of the 16 elements marked off in quadruples as in 1 2 3 4 . 5 6 7 8 . 9 10 11 12 . 13 14 15 16 and formed into a quadruple system as induced by this grouping gives rise to a quadruple system which is invariant in a G_{192}.

6. Quintuple and higher systems.

By a similar procedure as in $\triangle \begin{smallmatrix} 4 \\ n \end{smallmatrix}$ it is found that the lowest possible non-trivial quintuple system is a $\triangle \begin{smallmatrix} 5 \\ 11 \end{smallmatrix}$ with 66 quintuples. In such a system every letter occurs 30 times, every couple 12 times, every triple 4 times, every quadruple once.

Professor Carmichael shows that the group which leaves this system invariant is a four-fold transitive Mathieu group of degree 11 and order $11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8$.

The existence proofs for quintuple systems for $n > 11$, and in general of k-tuples systems seem to be difficult, likewise the solution of the problem of complete sets of k-tuples systems for possible values of n. In any case these problems are closely connected with group theory.

As in the case of the 8-cell in S_4, other conditions than the existence of each $(k-1)$-tuples in a set of k-tuples may be imposed on n elements. We get accordingly different configuration and groups in which they are invariant.

Eingegangen 13. Februar 1929.

Über die schlichten Bereiche in der Theorie der Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen.

Von *Stefan Bergmann* in Berlin.

In zwei vor kurzem erschienenen Arbeiten [1]) wurden die zusammenhängenden Bereiche des $\mathfrak{R}^{(4)}$ [2]) in Klassen eingeteilt, wobei die Gesamtheit der Bereiche, die durch (in bezug auf den Koordinatenanfangspunkt) normierte [3]) Paare von Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen aufeinander abbildbar sind, in einer Klasse zusammengefaßt wurde.

Es zeigte sich dabei, daß man in jeder Klasse abzählbar viel unabhängige Invarianten aufstellen und einen ausgezeichneten Repräsentantenbereich aussondern kann. Die erste dieser Invarianten hat die folgende Bedeutung:

Ist $\mathfrak{B}^{(4)}$ irgendein Bereich, der zu der betreffenden Klasse gehört, so bezeichnen wir als die erste Invariante λ_{00} das Minimum von

$$\iiiint_{\mathfrak{B}^{(4)}} |f(X, Z)|^2 d\omega \quad [4]), \tag{1}$$

wobei zur Konkurrenz alle in $\mathfrak{B}^{(4)}$ regulären Funktionen $f(X, Z)$ mit endlichem $\iiiint_{\mathfrak{B}^{(4)}} |f(X, Z)|^2 d\omega$ herangezogen werden, deren Funktionselement um den Koordinatenanfangspunkt mit 1 [5]) beginnt. λ_{00} kann man als das (vierdimensionale) Volumen derjenigen Bereiche der Klasse deuten, die das kleinste Volumen besitzen.

---

[1]) Über unendliche Hermitesche Formen, die zu einem Bereiche gehören, nebst Anwendungen auf Fragen der Abbildung durch Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen, Mathem. Zeitschr. **29** (1928), S. 640—677 und: Über die Existenz von Repräsentantenbereichen in der Theorie der Abbildung durch Paare von Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen, Mathem. Annalen **102** (1929), S. 430—446. Vergl. ferner *H. Welke*, Über die analytischen Abbildungen von Kreiskörpern und Hartogsschen Bereichen, Math. Ann. **103** (1930). Wir werden im folgenden die beiden ersten Aufsätze als Arbeiten H und E bezeichnen. In der Fußnote [12]) S. 431 der Arbeit E befindet sich ein Druckfehler, der hier berichtigt werden soll: anstatt „außerordentliche singuläre Stellen" soll es „außerwesentliche singuläre Stellen" heißen.

[2]) Mit $\mathfrak{R}^{(n)}$ soll der n-dimensionale Raum bezeichnet werden. Der obere eingeklammerte Index bei einer Mannigfaltigkeit gibt die Dimension der Mannigfaltigkeit an.

[3]) Unter einem in bezug auf den Punkt $X = 0, Z = 0$ normierten Funktionenpaar wird ein Paar $V(X, Z)$, $W(X, Z)$ verstanden, für welches

$$\text{(A)} \qquad \begin{aligned} V(0,0) &= 0, \quad \left[\frac{\partial V(X,Z)}{\partial X}\right]_{X=Z=0} = 1, \quad \left[\frac{\partial V(X,Z)}{\partial Z}\right]_{X=Z=0} = 0, \\ W(0,0) &= 0, \quad \left[\frac{\partial W(X,Z)}{\partial X}\right]_{X=Z=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial W(X,Z)}{\partial Z}\right]_{X=Z=0} = 1 \end{aligned}$$

gilt.

[4]) Unter $\iiiint_{\mathfrak{B}^{(4)}}$ wird stets das uneigentliche Integral verstanden. $d\omega$ bedeutet das (vierdimensionale) Volumenelement.

[5]) Die weiteren Invarianten λ_{nm} werden durch das Minimum von (1) bei der Nebenbedingung, daß das Funktionelement von $f(X, Z)$ mit $X^n Z^m$ beginnt, gegeben. Für die n, m wird dabei stets die Reihenfolge

$$(0,0),\ (1,0),\ (0,1),\ (2,0),\ (1,1),\ (0,2), \ldots$$

Im Falle der einfach zusammenhängenden Bereiche der Ebene charakterisiert eine einzige Invariante[6]) vollständig die Klasse. Es sind in diesem Falle alle Invarianten λ_n Funktionen einer unter ihnen. λ_0 ist die Fläche des Kreises um den Koordinatenanfangspunkt, der zur Klasse gehört.

Es entsteht nunmehr eine wichtige Aufgabe, umgekehrt mit Hilfe der zur Klasse gehörigen Invarianten geometrische Eigenschaften der Bereiche, die zu der betreffenden Klasse gehören, festzustellen.

Stellt man bei den einfach zusammenhängenden Bereichen der Ebene die entsprechende Aufgabe, so ist das Problem bedeutend einfacher, da man jeden Bereich auf das Innere eines Kreises abbilden kann (vgl. Fußbemerkung[6])). Einer der wichtigsten Sätze aus dieser Gruppe ist der Koebesche Satz (mit der Bieberbachschen Schranke), der besagt, daß jeder Berandungspunkt des schlichten Gebietes $\mathfrak{S}^{(2)}$ mindestens um $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\lambda_0}{\pi}}$ von dem Koordinatenanfangspunkt entfernt sein muß (λ_0 ist die Invariante der Klasse, zu der $\mathfrak{S}^{(2)}$ gehört). Ein anderes wichtiges Ergebnis ist der bekannte Löwnersche Satz[7]) über die konvexen Bereiche.

Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist es zu zeigen, daß man mit Hilfe ähnlicher Betrachtungen wie beim Koebeschen Satz gewisse Beziehungen geometrischer Natur bei den schlichten Bereichen $\mathfrak{S}^{(4)}$ des $\mathfrak{R}^{(4)}$ feststellen kann.

§ 1.

$\mathfrak{S}^{(4)}$ sei ein schlichter, einfach zusammenhängender[8]) Bereich des $\mathfrak{R}^{(4)}$, der den Koordinatenanfangspunkt in seinem Inneren enthält und von der dreidimensionalen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^{(3)}$ berandet ist.

Eine analytische Ebene $\mathfrak{E}^{(2)}$, die durch einen äußeren oder Randpunkt $\mathfrak{P}(x, z)$ von $\mathfrak{S}^{(4)}$ geht, soll für den Punkt $\mathfrak{P}$ eine Trennebene heißen, wenn der durch den Punkt $X = 0$, $Z = 0$ und $\mathfrak{E}^{(2)}$ gelegte, lineare dreidimensionale Raum $\mathfrak{R}^{(3)}$ so durch

---

festgehalten. Geht man von der Normierung (A) zu der Normierung

$$\text{(B)} \qquad V(0,0) = 0, \qquad W(0,0) = 0, \qquad \left|\left[\frac{\partial(V,W)}{\partial(X,Z)}\right]_{X=Z=0}\right| = 1$$

über, so ist es vorteilhaft, gewisse neue mit den Invarianten λ_{nm} eng verknüpfte Hermitesche Formen einzuführen. Sucht man das Minimum von (1) bei der Nebenbedingung, daß $f(X,Z)$ mit dem homogenen Polynom $\sum_{(\nu,\mu)=(n,0)}^{(\nu,\mu)=(0,n)} \alpha_{\nu\mu} X^\nu Z^\mu$ beginnt, so wird dieses Minimum durch die Hermitesche Form $H_n(\alpha_{\nu\mu}, \overline{\alpha_{\nu'\mu'}})$ der $n+1$ Veränderlichen $\alpha_{\nu\mu}$ und ihrer Konjugierten gegeben (vgl. Arbeit H, S. 668, 672, 676). Wie in der Arbeit H gezeigt ist, lassen sich die λ_{nm} und die $H_n(\alpha_{\nu\mu}, \overline{\alpha_{\nu'\mu'}})$ in einer einfachen Weise durch das vollständige Orthogonalfunktionensystem, das zu $\mathfrak{B}^{(4)}$ gehört, und deren Ableitungen ausdrücken. Da man in den meisten Fällen der einfach zusammenhängenden Bereiche des $\mathfrak{R}^{(4)}$ ein konstruktives Verfahren zur Berechnung eines vollständigen Orthogonalfunktionensystemes angeben kann, so haben wir die Möglichkeit, in diesen Fällen die λ_{nm} tatsächlich zu berechnen.

[6]) Im Falle der Ebene wird man als normiert eine Funktion $w(z)$ bezeichnen für die $w(0) = 0$, $\left[\frac{dw(z)}{dz}\right]_{z=0} = 1$ gilt. Nach dem Riemannschen Abbildungssatz gehört zu jeder Klasse von einfach zusammenhängenden Bereichen ein Kreis um den Koordinatenanfangspunkt. λ_0 ist seine Fläche. Herr Bieberbach führt an Stelle von λ_0 den Radius $\sqrt{\frac{\lambda_0}{\pi}}$ dieses Kreises ein, den er als Abbildungsradius bezeichnet (vgl. dazu *Bieberbach*, Lehrbuch der Funktionentheorie II [Berlin 1927], S. 322).

[7]) *Karl Löwner*, Untersuchungen über die Verzerrung bei konformen Abbildungen des Einheitskreises $|Z| \leqq 1$, die durch Funktionen mit nicht verschwindender Ableitung geliefert werden, Berichte der sächs. Akademie der Wissenschaften **69** (1917), S. 89—106.

[8]) Darunter wird verstanden, daß $\mathfrak{S}^{(4)}$ einer Hyperkugel (topologisch) homöomorph ist.

$\mathfrak{E}^{(2)}$ in zwei Teile zerlegt wird, daß der eine Teil keine gemeinsamen Punkte mit dem Inneren von $\mathfrak{S}^{(4)}$ besitzt. Die Ebene $\mathfrak{E}^{(2)}$ kann auch nur mit der Berandung $\mathfrak{M}^{(3)}$ von $\mathfrak{S}^{(4)}$ gemeinsame Punkte haben; wir schreiben ihre Gleichung in der Form:

$$\begin{aligned} &a X + b Z = L \qquad (L = a x + b z) \\ &|a|^2 + |b|^2 = 1. \end{aligned} \tag{2}$$

Einen äußeren oder Randpunkt von $\mathfrak{S}^{(4)}$ nennen wir in bezug auf $\mathfrak{S}^{(4)}$ subkonvex, wenn es zu ihm mindestens eine Trennebene gibt [9]).

Einen äußeren oder Randpunkt von $\mathfrak{S}^{(4)}$ nennen wir in bezug auf $\mathfrak{S}^{(4)}$ bikonvex, wenn zu ihm mindestens zwei verschiedene Trennebenen $\mathfrak{E}^{(1)}$ und $\mathfrak{E}^{(2)}$ existieren.

Hat man allgemein zwei analytische Ebenen

$$\begin{aligned} &a_n X + b_n Z = L_n \\ &|a_n|^2 + |b_n|^2 = 1 \end{aligned} \qquad (n = 1, 2), \tag{3}$$

so wird der Winkel zwischen ihnen bekanntlich [10]) durch die Gleichungen

$$\sin \varepsilon_{12} = |a_1 b_2 - a_2 b_1| \tag{4}$$

$$\cos \varepsilon_{12} = |a_1 \bar{b}_1 + a_2 \bar{b}_2| \tag{4 a}$$

definiert. Der Winkel zwischen den beiden (verschiedenen) Trennebenen in einem bikonvexen Punkt ist immer von 0 verschieden.

Satz I. *Seien $\mathfrak{P}_1(X_1, Z_1)$ und $\mathfrak{P}_2(X_2, Z_2)$ zwei in bezug auf den schlichten, ganz im Endlichen gelegenen Bereich $\mathfrak{S}^{(4)}$ subkonvexe Punkte. Die erste Invariante von $\mathfrak{S}^{(4)}$ sei λ_{00}. Besitzen die Trennebenen $\mathfrak{E}_1^{(2)}$ und $\mathfrak{E}_2^{(2)}$ der Punkte $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ einen von 0 verschiedenen Winkel ε_{12}, so gilt die Ungleichung*

$$\left|\frac{L_1 L_2}{\sin \varepsilon_{12}}\right| \equiv \left|\frac{(a_1 X_1 + b_1 Z_1)(a_2 X_2 + b_2 Z_2)}{a_1 b_2 - a_2 b_1}\right| \geqq \frac{1}{16\pi}\sqrt{\lambda_{00}}, \tag{5}$$

wobei (3) *die Gleichung von $\mathfrak{E}_n^{(2)}$ ist.*

Beweis. Durch die Transformation

$$v = \frac{a_1}{\sqrt{\sin \varepsilon_{12}}} X + \frac{b_1}{\sqrt{\sin \varepsilon_{12}}} Z, \tag{6}$$

$$w = \frac{a_2}{\sqrt{\sin \varepsilon_{12}}} X + \frac{b_2}{\sqrt{\sin \varepsilon_{12}}} Z \tag{6 a}$$

geht $\mathfrak{S}^{(4)}$ in einen schlichten Bereich $\mathfrak{S}^{(4)*}$ über, und die Gleichungen der Trennebenen erhalten die Form

$$v = \frac{L_1}{\sqrt{\sin \varepsilon_{12}}} \quad \text{bzw.} \tag{7}$$

$$w = \frac{L_2}{\sqrt{\sin \varepsilon_{12}}}. \tag{7 a}$$

Legen wir nun den dreidimensionalen linearen Raum $\mathfrak{R}_n^{(3)}$ durch den Koordinatenanfangspunkt O und $\mathfrak{E}_n^{(2)}$ $(n = 1, 2)$, so wird, da $\mathfrak{P}_n$ subkonvex ist, der eine durch $\mathfrak{E}_n^{(2)}$ begrenzte Teil $\mathfrak{L}_n^{(3)}$ von $\mathfrak{R}_n^{(3)}$ außerhalb von $\mathfrak{S}^{(4)*}$ liegen. Wir schlitzen den vierdimensionalen Raum längs der Raumschlitze $\mathfrak{L}_1^{(3)}$ und $\mathfrak{L}_2^{(3)}$ auf. Der so entstandene vierdimensionale Bereich $\mathfrak{G}^{(4)}$ kann auch als Produktbereich der (gemäß Abb. 1 und 2) aufgeschlitzten v- und w-Ebene aufgefaßt werden.

---

[9]) Jeder Randpunkt eines konvexen Bereiches ist subkonvex.

[10]) Vgl. dazu *E. Study*, Sugli enti analitici, Rend. di Circ. mat. di Palermo **21** (1906), S. 345 und *K. Reinhardt*, Über Abbildungen durch analytische Funktionen zweier Veränderlicher, Math. Annalen **83** (1921), S. 220.

Die analytischen Ebenen werden in der genannten Arbeit von E. Study als „synektische" Ebenen bezeichnet.

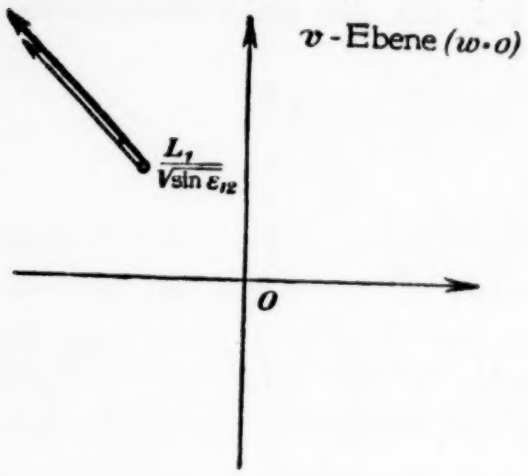

Abb. 1[11])

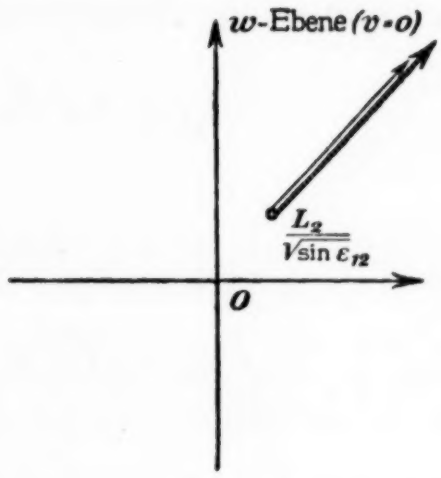

Abb. 2[11])

Wir wenden nunmehr auf den geschlitzten Raum $\mathfrak{G}^{(4)}$ die Transformation

$$V = -4\frac{L_1}{\sqrt{\sin \varepsilon_{12}}}\frac{\sqrt{v - \frac{L_1}{\sqrt{\sin \varepsilon_{12}}}} - i\sqrt{\frac{L_1}{\sqrt{\sin \varepsilon_{12}}}}}{\sqrt{v - \frac{L_1}{\sqrt{\sin \varepsilon_{12}}}} + i\sqrt{\frac{L_1}{\sqrt{\sin \varepsilon_{12}}}}}, \tag{8}$$

$$W = -4\frac{L_2}{\sqrt{\sin \varepsilon_{12}}}\frac{\sqrt{w - \frac{L_2}{\sqrt{\sin \varepsilon_{12}}}} - i\sqrt{\frac{L_2}{\sqrt{\sin \varepsilon_{12}}}}}{\sqrt{w - \frac{L_2}{\sqrt{\sin \varepsilon_{12}}}} + i\sqrt{\frac{L_2}{\sqrt{\sin \varepsilon_{12}}}}} \tag{8 a}$$

an, wobei in (8, 8a) diejenigen Zweige gewählt werden, für die V bzw. W für $v = 0$ bzw. $w = 0$ gleich Null wird. $\mathfrak{G}^{(4)}$ wird dann schlicht auf einen Bizylinder $\mathfrak{A}^{(4)}$ abgebildet,

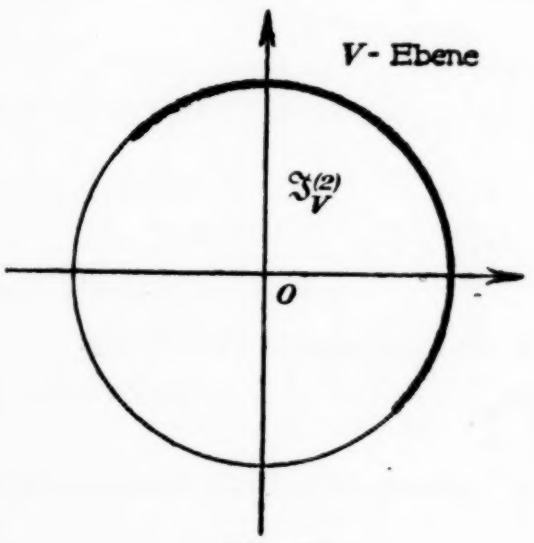

Abb. 3

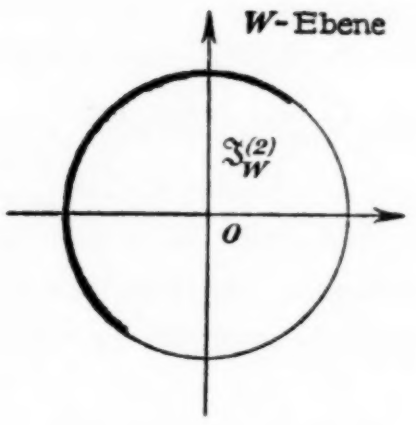

Abb. 4

dessen Komponenten $\mathfrak{J}_V^{(2)}$ und $\mathfrak{J}_W^{(2)}$ Kreise um den Koordinatenanfangspunkt mit den Radien $4\left|\frac{L_1}{\sqrt{\sin \varepsilon_{12}}}\right|$ bzw. $4\left|\frac{L_2}{\sqrt{\sin \varepsilon_{12}}}\right|$ sind [12]). Der aus $\mathfrak{S}^{(4)*}$ durch die Transformation (8, 8a) hervorgegangene Bereich $\mathfrak{S}^{(4)**}$ liegt ganz in $\mathfrak{A}^{(4)}$. Unsere Trans-

[11]) Der Schlitz, der im Punkte $v = \frac{L_1}{\sqrt{\sin \varepsilon_{12}}}$ $\left(\text{bzw. } w = \frac{L_2}{\sqrt{\sin \varepsilon_{12}}}\right)$ beginnt, liegt auf dem Strahle, der O mit Unendlichen verbindet.

[12]) Der Bizylinder $\mathfrak{A}^{(4)}$ ist ein (Produkt-)Bereich des $\mathfrak{R}^{(4)}$, dessen Inneres aus allen Punkten $V_\mathfrak{J}$, $W_\mathfrak{J}$ besteht, wobei $V_\mathfrak{J}$ ein beliebiger innerer Punkt von $\mathfrak{J}_V^{(2)}$, $W_\mathfrak{J}$ von $\mathfrak{J}_W^{(2)}$ ist.

formationen erfüllen die Normierung **(B)**, bei der die erste Invariante λ_{00} erhalten bleibt. Da

$$\lambda_{00} \leqq \text{Vol. von } \mathfrak{S}^{(4)**} \leqq \text{Vol. von } \mathfrak{A}^{(4)}, \tag{9}$$

ist

$$\lambda_{00} \leqq 16^2 \pi^2 \left| \frac{L_1 L_2}{\sin \varepsilon_{12}} \right|^2, \tag{5 a}$$

w. z. b. w. [13]).

Korollar I. *Sind die Punkte* $\mathfrak{P}_n$ $(n = 1, 2)$ *in bezug auf den Bereich* $\mathfrak{S}^{(4)}$ *subkonvex, und bedeutet* E_n *die Entfernung des Koordinatenanfangspunktes* O *von* $\mathfrak{P}_n$, *so ist*:

$$\frac{E_1 E_2}{\sin \varepsilon_{12}} \geqq \frac{1}{16\pi} \sqrt{\lambda_{00}}\ ^{14}). \tag{10}$$

Es ist nämlich

$$E_n \geqq |L_n|,$$

da $|L_n|$ den Abstand der Ebene $\mathfrak{E}_n^{(2)}$ von O angibt, und $\mathfrak{P}_n$ in der Ebene $\mathfrak{E}_n^{(2)}$ liegt.

Wie aus dem Beweis des Satzes hervorgeht, kann man die Punkte $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ zusammenfallen lassen, wenn nur die Ebenen $\mathfrak{E}_1^{(2)}$ und $\mathfrak{E}_2^{(2)}$ verschieden bleiben, d. h. wenn es sich um einen bikonvexen Punkt handelt. Aus dem Korollar I folgt dann:

Korollar II. *Ist* $\mathfrak{P}$ *ein in bezug auf* $\mathfrak{S}^{(4)}$ *bikonvexer Punkt und bedeutet* E *seine Entfernung von dem Koordinatenanfangspunkte* O *und* ε *den Winkel, den zwei seiner Trenn-*

---

[13]) In gleicher Weise wie bei dem Beweis unseres Satzes, schließt man daß die n-te Hermitesche Form $H_n(.,\bar{.})$ [5]) des Bizylinders $\mathfrak{A}^{(4)}$ größer als die entsprechende Hermitesche Form von $\mathfrak{S}^{(4)**}$ ist. Wendet man die Transformationen (6, 6a), (8, 8a) an, so geht eine Funktion f, die mit dem Funktionselement $\sum_{p=0}^{p=n} \alpha_{r-p,p} X^p Z^{n-p}$ beginnt, in eine Funktion über, deren Funktionselement mit $\frac{e^{i\varphi}}{\sin^{\frac{n}{2}} \varepsilon_{12}} \sum_{p=0}^{p=n} S_p V^p W^{n-p}$ beginnt, wo

$$S_p = (-1)^p \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n} \alpha_{n-\varkappa,\varkappa} (-a_2)^{n-\varkappa} b_2^{\varkappa} \left[\sum_{s=0}^{s=p} \binom{\varkappa}{s} \binom{n-\varkappa}{\varkappa-s} \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^s \left(\frac{b_1}{b_2}\right)^{p-s} \right]$$

und $|e^{i\varphi}| = 1$ ist. Es folgt daraus, daß

$$H_n(\alpha_{\nu\mu}, \overline{\alpha_{\nu'\mu'}}) \leqq \frac{\pi^2 4^{2(n+2)}}{\sin^{2n+2} \varepsilon_{12}} \sum_{p=0}^{p=n} |L_1|^{2p+2} |L_2|^{2(n-p)+2} |S_p|^2$$

ist.

[14]) Im Falle einer komplexen Veränderlichen lautet die entsprechende Ungleichung:

$$E \geqq \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\lambda_0}{\pi}}.$$

Bezeichnet man mit $\Omega_s(X, Z)$ $(s = 1, 2, 3, \ldots.)$ das zu $\mathfrak{S}^{(4)}$ gehörige, vollständige Orthogonalfunktionensystem, so ist

$$\lambda_{00} = \frac{1}{\sum_{s=1}^{\infty} \Omega_s(0,0)\, \overline{\Omega_s(0,0)}}$$

(vgl. dazu die Arbeit H). Da man den Koordinatenanfangspunkt als in einem beliebigen inneren Punkte von $\mathfrak{S}^{(4)}$ gelegen annehmen kann, folgt aus (5 a) bzw. (10) eine Abschätzung nach unten für den Kern $\sum_{s=1}^{\infty} \Omega_s(X, Z)\, \overline{\Omega_s(X, Z)}$.

Die in bezug auf $\mathfrak{S}^{(4)}$ subkonvexen Punkte können beliebig nahe an den Koordinatenanfangspunkt O heranrücken. Bezeichnen wir mit δ eine beliebig kleine Größe, so hat der Bizylinder, dessen Komponenten Kreise von den Radien δ und $\frac{1}{\pi\delta} \sqrt{\lambda_{00}}$ sind, subkonvexe Berandungspunkte, deren Entfernung von dem Punkt O den Wert δ besitzt. Die erste Invariante dieses Bizylinders, die Größe λ_{00}, kann dabei jeden beliebigen Wert haben.

ebenen miteinander bilden, so ist

$$E \geqq \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\sin \varepsilon}{\pi}}\sqrt[4]{\lambda_{00}}. \tag{11}$$

§ 2.

Betrachten wir alle schlichten Abbildungen des Bereiches $\mathfrak{S}^{(4)}$ durch Funktionen, die die Normierung **(B)** erfüllen. Zu jedem der so entstandenen Bereiche gibt es eine kleinste Hyperkugel vom Radius P mit dem Mittelpunkt in O, die den betreffenden Bereich enthält. P hat eine von 0 verschiedene untere Grenze, die wir mit ϱ bezeichnen. ϱ ist eine Zahl, die durch die Klasse gegeben ist [15]).

Die auf diese Weise eingeführte Größe ϱ läßt sich mit den von uns früher betrachteten Größen in Beziehung setzen. Es ist zunächst klar, daß

$$\frac{\pi^2}{2}\varrho^4 \geqq \lambda_{00}$$

ist. Wir können ferner ein dem Satze I analoges Ergebnis erhalten, indem wir bei unseren früheren Betrachtungen λ_{00} durch ϱ ersetzen. Es gilt der

Satz II. *Sind $\mathfrak{P}_1(X_1, Z_1)$, $\mathfrak{P}_2(X_2, Z_2)$ zwei in bezug auf $\mathfrak{S}^{(4)}$ subkonvexe Punkte, deren Trennebenen die Form (4) haben, so gilt für die Größe ϱ, die zur Klasse von $\mathfrak{S}^{(4)}$ gehört, die Ungleichung*

$$\varrho \leqq 4\sqrt{\frac{2|L_1 L_2|}{\sin \varepsilon_{12}}}. \tag{12}$$

Beweis. Wir wenden wie bei dem Beweise des Satzes I auf $\mathfrak{S}^{(4)}$ die Transformationen (6, 6a), (8, 8a) an und außerdem nachträglich noch die Transformation

$$V^* = \sqrt{\left|\frac{L_1}{L_2}\right|}\, V, \tag{13}$$

$$W^* = \sqrt{\left|\frac{L_2}{L_1}\right|}\, W. \tag{13 a}$$

Der Bereich $\mathfrak{G}^{(4)}$ wird dann auf den Bizylinder $\mathfrak{A}^{(4)*}$ um den Koordinatenanfangspunkt O abgebildet, dessen Komponenten zwei Kreise um den Koordinatenanfangspunkt O mit gleichen Radien $4\sqrt{\frac{|L_1 L_2|}{\sin \varepsilon_{12}}}$ sind. Die größte Entfernung der Berandung von $\mathfrak{A}^{(4)*}$ von dem Punkte O ist $4\sqrt{\frac{2|L_1 L_2|}{\sin \varepsilon_{12}}}$. $\mathfrak{A}^{(4)*}$ liegt also ganz im Innern einer Hyperkugel um O vom Radius $4\sqrt{\frac{2|L_1 L_2|}{\sin \varepsilon_{12}}}$, und es muß somit die Ungleichung (12) gelten.

§ 3.

Benutzt man die in (3) und (4) eingeführten Bezeichnungen und läßt man X_n, Z_n $(n = 1, 2)$ alle in bezug auf $\mathfrak{S}^{(4)}$ subkonvexen Punkte durchlaufen, so wird der Ausdruck

$$\frac{\text{max.}\,[|L_1|,\ |L_2|]}{\sin \varepsilon_{12}} \equiv \frac{\text{max.}\,[|a_1 X_1 + b_1 Z_1|,\ |a_2 X_2 + b_2 Z_2|]}{|a_1 b_2 - a_2 b_1|}$$

eine von Null verschiedene untere Grenze besitzen. Es ist nicht schwer zu beweisen,

[15]) Es liegt nahe — auf einem ähnlichen Wege, wie im Falle der Theorie einer komplexen Veränderlichen — den Beweis zu führen, daß es in jeder Klasse schlichte Bereiche gibt, die im Innern einer Hyperkugel vom Radius ϱ um den Koordinatenanfangspunkt liegen. (Vergl. etwa *Bieberbach*, Lehrbuch der Funktionentheorie II, S. 6). Für die subkonvexen Berandungspunkte solcher Bereiche kann man weitere Ungleichungen aufstellen, worauf wir aber hier nicht näher eingehen werden.

daß diese Grenze ein Minimum darstellt. Wir werden dieses Minimum mit $\mu(\mathfrak{S}^{(4)})$ oder kurz mit μ bezeichnen.

Korollar III. *Jeder in bezug auf $\mathfrak{S}^{(4)}$ subkonvexe Punkt $\mathfrak{P}_3$ ist mindestens um*

$$E_3 \geqq \frac{\sqrt{\lambda_{00}}}{32\pi\mu} \tag{14}$$

vom Koordinatenanfangspunkt O entfernt.

Beweis. Seien $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ diejenigen Punkte, für die $\frac{\text{max.}\,(|L_1|, |L_2|)}{\sin \varepsilon_{12}}$ gleich μ ist. Wir zeigen zunächst, daß die Trennebene eines beliebigen subkonvexen Punktes mindestens mit einer der Ebenen $\mathfrak{E}_1^{(2)}$ und $\mathfrak{E}_2^{(2)}$ einen Winkel bildet, dessen sin nicht kleiner als $\frac{1}{2}\sin\varepsilon_{12}$ ist. Durch eine analytische Drehung um den Punkt O können wir erreichen, daß die Gleichung von $\mathfrak{E}_3^{(2)}$ die Gestalt

$$Z = \text{const.}$$

hat. Die Gleichungen von $\mathfrak{E}_1^{(2)}$ und $\mathfrak{E}_2^{(2)}$ sollen dann lauten:

$$a_1 X + b_1 Z = \text{const.} \quad \text{bzw.} \quad a_2 X + b_2 Z = \text{const.}$$

Es ist nun

$$\sin\varepsilon_{13} = |a_1| \qquad \sin\varepsilon_{23} = |a_2|$$

$$\sin\varepsilon_{12} = |a_1 b_2 - a_2 b_1| \leqq \sqrt{(|a_1|^2 + |a_2|^2)\,(|b_1|^2 + |b_2|^2} \leqq \sqrt{2(|a_1|^2 + |a_2|^2)} \tag{15}$$

$$= \sqrt{2(\sin^2\varepsilon_{13} + \sin^2\varepsilon_{23})} \leqq 2\,\text{max.}\,(\sin\varepsilon_{13}, \sin\varepsilon_{23}).$$

Bedeutet E_n die Entfernung des Punktes $\mathfrak{P}_n$ $(n = 1, 2, 3)$ von O und wählt man die Bezeichnungen so, daß $\varepsilon_{13} \geqq \varepsilon_{23}$ wird, so folgt aus (5), daß

$$|L_1| E_3 \geqq |L_1|\,|L_3| \geqq \frac{1}{16\pi}\sqrt{\lambda_{00}}\sin\varepsilon_{13} \geqq \frac{1}{32\pi}\sqrt{\lambda_{00}}\sin\varepsilon_{12}$$

oder

$$E_3 \geqq \sqrt{\lambda_{00}}\,\frac{\sin\varepsilon_{12}}{32\pi\,|L_1|} \geqq \frac{\sqrt{\lambda_{00}}}{32\pi\mu} \tag{14 a}$$

wird, w. z. b. w.

Ist $X^*(X, Z)$, $Z^*(X, Z)$ ein im Sinne der Beziehung **(B)** normiertes Funktionenpaar, dessen Funktionaldeterminante $D^*(X, Z)$ ist und das einen schlichten Bereich $\mathfrak{S}^{(4)}$ des XZ-Raumes auf einen anderen schlichten Bereich $\mathfrak{S}^{(4)*}$ des X^*Z^*-Raumes abbildet, so entsteht — in Analogie zu dem ebenen Fall — die Frage, ob die Größen

$$\left|\left(\frac{\partial X^*}{\partial X}\right)_{X=Z=0}\right|, \quad \left|\left(\frac{\partial X^*}{\partial Z}\right)_{X=Z=0}\right|, \quad \left|\left(\frac{\partial Z^*}{\partial X}\right)_{X=Z=0}\right|, \quad \left|\left(\frac{\partial Z^*}{\partial Z}\right)_{X=Z=0}\right|,$$

$$\left|\left[\frac{\partial D^*(X, Z)}{\partial X}\right]_{X=Z=0}\right|, \quad \left|\left[\frac{\partial D^*(X, Z)}{\partial Z}\right]_{X=Z=0}\right|$$

nicht unter nur von der Klasse abhängigen Schranken liegen müssen. Wir werden im folgenden für schlichte subkonvexe Bereiche [16]) Schranken dieser Art angeben, die allerdings außer von Klasseninvarianten noch von $\mu(\mathfrak{S}^{(4)})$ und $\mu(\mathfrak{S}^{(4)*})$ abhängig sind [17]).

[16]) Unter einem subkonvexen Bereich wird ein ganz im Endlichen gelegener Bereich verstanden, dessen sämtliche Berandungspunkte subkonvex sind. (Jeder konvexe Bereich z. B. ist subkonvex.) Es lassen sich die hier angegebenen Voraussetzungen stark vermindern. Insbesondere ist es überflüssig, die Subkonvexität auf der ganzen Berandung von $\mathfrak{S}^{(4)}$ und von $\mathfrak{S}^{(4)*}$ zu fordern. Da aber die Formulierung dieser Bedingungen und der entsprechende Beweis die Kenntnis der Ergebnisse der Theorie von „ausgezeichneten Randflächen" erfordern, verzichten wir auf ihre Wiedergabe.

[17]) Da man bei diesen Abschätzungen μ durch eine größere Zahl ersetzen darf, gelten die im weiteren abgeleiteten Ungleichungen schon bei sehr allgemeinen Mengen von schlichten Bereichen, die zu einer

Hilfssatz. *Sei $X^\dagger(X,Z)$, $Z^\dagger(X,Z)$ ein im Sinne von* (**B**) *normiertes Funktionenpaar, das den subkonvexen, schlichten, ganz im Endlichen gelegenen Bereich $\mathfrak{S}^{(4)}$ auf einen ganz im Innern der Hyperkugel vom Radius* P *mit dem Mittelpunkt in O gelegenen schlichten Bereich $\mathfrak{B}^{(4)\dagger}$ abbildet. Es sind dann die Größen*

(16) $\left|\left[\frac{\partial^{n+m}X^\dagger}{\partial X^n\,\partial Z^n}\right]_{X=Z=0}\right|$, $\left|\left[\frac{\partial^{n+m}Z^\dagger}{\partial X^n\partial Z^m}\right]_{X=Z=0}\right|$ *gleich oder kleiner als* $\dfrac{n!\,m!\,(32\sqrt{2}\pi\mu)^{n+m}\mathsf{P}}{\lambda_{00}^{\frac{n+m}{2}}}$,

(17) $\left|\left[\frac{\partial X}{\partial X^\dagger}\right]_{X^\dagger=Z^\dagger=0}\right|$, $\left|\left[\frac{\partial X}{\partial Z^\dagger}\right]_{X^\dagger=Z^\dagger=0}\right|$, $\left|\left[\frac{\partial Z}{\partial X^\dagger}\right]_{X^\dagger=Z^\dagger=0}\right|$, $\left|\left[\frac{\partial Z}{\partial Z^\dagger}\right]_{X^\dagger=Z^\dagger=0}\right|$ " $\dfrac{32\sqrt{2}\pi\mu\mathsf{P}}{\sqrt{\lambda_{00}}}$,

(18) $\left|\left[\frac{\partial D^\dagger(X,Z)}{\partial X}\right]_{X=Z=0}\right|$, $\left|\left[\frac{\partial D^\dagger(X,Z)}{\partial Z}\right]_{X=Z=0}\right|$ " $\dfrac{6\,(32\sqrt{2}\pi\mu)^3\mathsf{P}^2}{\sqrt{\lambda_{00}^3}}$,

(19) $\left|\left[\frac{\partial D(X^\dagger,Z^\dagger)}{\partial X^\dagger}\right]_{X^\dagger=Z^\dagger=0}\right|$, $\left|\left[\frac{\partial D(X^\dagger,Z^\dagger)}{\partial Z^\dagger}\right]_{X^\dagger=Z^\dagger=0}\right|$ " $\dfrac{12\,(32\sqrt{2}\pi\mu)^4\mathsf{P}^3}{\lambda_{00}^2}$,

$$D^\dagger(X,Z)\equiv\frac{\partial(X^\dagger,Z^\dagger)}{\partial(X,Z)},\qquad D(X^\dagger,Z^\dagger)\equiv\frac{\partial(X,Z)}{\partial(X^\dagger,Z^\dagger)}.$$

Beweis. Da die Berandung von $\mathfrak{S}^{(4)}$ aus lauter subkonvexen Punkten besteht, so ist nach dem Korrollar III jeder Berandungspunkt mindestens um $\dfrac{\sqrt{\lambda_{00}}}{32\pi\mu}$ von dem Koordinatenanfangspunkt entfernt. Wir können somit im Innern von $\mathfrak{S}^{(4)}$ einen Bizylinder legen, der das Produkt von zwei Kreisen um den Koordinatenanfangspunkt als Mittelpunkt mit gleichen Radien $\dfrac{\sqrt{\lambda_{00}}}{32\sqrt{2}\pi\mu}$ ist, von denen der eine in der Ebene $X=0$, der andere in der Ebene $Z=0$ liegt. Da $\mathfrak{B}^{(4)\dagger}$ ganz im Innern einer Hyperkugel vom Radius P liegt, so ist sowohl $X^\dagger(X,Z)$, wie $Z^\dagger(X,Z)$ in jedem Punkte X,Z dieses Bizylinders kleiner als P. Nach dem Cauchyschen Residuensatz [18]) gelten die Ungleichungen (16). Da ferner das Funktionspaar im Sinne der Relation (**B**) normiert ist, d. h. da

$$\textbf{(B)}\qquad X^\dagger(0,0)=0,\quad Z^\dagger(0,0)=0,\quad \left|\left[\frac{\partial X^\dagger}{\partial X}\frac{\partial Z^\dagger}{\partial Z}-\frac{\partial X^\dagger}{\partial Z}\frac{\partial Z^\dagger}{\partial X}\right]_{X=Z=0}\right|=1$$

ist, folgt die Relation (17). Nun ist

$$\begin{aligned}\left|\left[\frac{\partial D^\dagger(X,Z)}{\partial X}\right]_{X=Z=0}\right| &= \left|\left[\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial X^\dagger}{\partial X}\frac{\partial Z^\dagger}{\partial Z}-\frac{\partial X^\dagger}{\partial Z}\frac{\partial Z^\dagger}{\partial X}\right)\right]_{X=Z=0}\right|\\ &\leqq\left[\left|\frac{\partial^2X^\dagger}{\partial X^2}\frac{\partial Z^\dagger}{\partial Z}\right|+\left|\frac{\partial X^\dagger}{\partial X}\frac{\partial^2Z^\dagger}{\partial Z\,\partial X}\right|+\left|\frac{\partial^2X^\dagger}{\partial Z\,\partial X}\frac{\partial Z^\dagger}{\partial X}\right|+\left|\frac{\partial X^\dagger}{\partial Z}\frac{\partial^2Z^\dagger}{\partial X^2}\right|\right]_{X=Z=0}\\ &\leqq\frac{6\,(32\sqrt{2}\pi\mu)^3\mathsf{P}^2}{(\sqrt{\lambda_{00}})^3}.\end{aligned}$$

Schließlich ist

$$D^\dagger(X,Z)\,D(X^\dagger,Z^\dagger)=1,$$

Klasse gehören. So z. B. bilden eine derartige Menge alle subkonvexen Bereiche der Klasse, die die Eigenschaft haben, daß man in ihrem Äußern zwei Ebenen $\mathfrak{E}_1^{(2)}$ und $\mathfrak{E}_2^{(2)}$ legen kann, die sich unter dem Winkel ε schneiden, wobei die Entfernungen E_1 und E_2 der Ebenen $\mathfrak{E}_1^{(2)}$ bzw. $\mathfrak{E}_2^{(2)}$ von O kleiner als eine feste Zahl sind, und ε größer als ein fester Winkel ε_0 ist.

[18]) Vgl. *Osgood*, Lehrb. der Funktionentheorie II (1924), S. 18.

somit

$$\frac{\partial D(X^\dagger, Z^\dagger)}{\partial X^\dagger} D^\dagger(X, Z) = - D(X^\dagger, Z^\dagger) \left[\frac{\partial D^\dagger(X, Z)}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial X^\dagger} + \frac{\partial D^\dagger(X, Z)}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial X^\dagger}\right]$$

und

$$\left|\left[\frac{\partial D(X^\dagger, Z^\dagger)}{\partial X^\dagger}\right]_{X^\dagger=Z^\dagger=0}\right| \leqq \frac{12(32\sqrt{2}\pi\mu)^4 P^3}{\lambda_{00}^2}.$$

Auf dem gleichen Wege beweisen wir die entsprechende Ungleichung für

$$\left|\left[\frac{\partial D(X^\dagger, Z^\dagger)}{\partial X^\dagger}\right]_{X^\dagger=Z^\dagger=0}\right|.$$

Satz III. *Seien $\mathfrak{S}^{(4)}$ und $\mathfrak{S}^{(4)*}$ zwei ganz im Endlichen gelegene, schlichte, subkonvexe Bereiche. Sei $X^*(X, Z)$, $Z^*(X, Z)$ ein im Sinne der Beziehung* (**B**) *normiertes Funktionenpaar, das $\mathfrak{S}^{(4)}$ auf $\mathfrak{S}^{(4)*}$ abbildet. Es ist dann*

$\left|\left(\frac{X^*}{X}\right)_{X=Z=0}\right|$, $\left|\left(\frac{\partial X^*}{\partial Z}\right)_{X=Z=0}\right|$, $\left|\left(\frac{\partial Z^*}{\partial X}\right)_{X=Z=0}\right|$, $\left|\left(\frac{\partial Z^*}{\partial Z}\right)_{X=Z=0}\right|$ *gleich oder kleiner als* $\frac{2(32\sqrt{2}\pi)^2\varrho^2\mu[\mathfrak{S}^{(4)}]\mu[\mathfrak{S}^{(4)*}}{\lambda_{00}}$

$\left[\frac{D^*(X, Z)}{\partial X}\right]_{X=Z=0}\Big|$, $\left|\left[\frac{\partial D^*(X, Z)}{\partial Z}\right]_{X=Z=0}\right|$,, $\frac{6(32\sqrt{2}\pi)^3\varrho^2}{\sqrt{\lambda_{00}^3}}\left[(\mu(\mathfrak{S}^{(4)}))^3 +\right.$

$\left. + \frac{4(32\sqrt{2}\pi)^2\varrho^2}{\lambda_{00}}(\mu(\mathfrak{S}^{(4)*}))^3\right.$

Beweis. Im § 2 wurde darauf hingewiesen, daß es in jeder Klasse schlichte Bereiche gibt, die im Innern einer Hyperkugel vom Radius $\varrho'(\varrho' > \varrho)$ liegen. Sei $X^\dagger(X, Z)$, $Z^\dagger(X, Z)$ ein Funktionenpaar, das $\mathfrak{S}^{(4)}$ auf einen derartigen Bereich abbildet, $X^*(X^\dagger, Z^\dagger)$, $Z^*(X^\dagger, Z^\dagger)$ dasjenige Paar, das diesen Bereich auf $\mathfrak{S}^{(4)*}$ abbildet. Da

$$\frac{\partial X^*}{\partial X} = \frac{\partial X^*}{\partial X^\dagger}\frac{\partial X^\dagger}{\partial X} + \frac{\partial X^*}{\partial Z^\dagger}\frac{\partial Z^\dagger}{\partial X}$$

ist, so ist

$$\left|\left(\frac{\partial X^*}{\partial X}\right)_{X=Z=0}\right| \leqq \frac{2(32\sqrt{2}\pi)^2\varrho'^2\mu[\mathfrak{S}^{(4)}]\mu[\mathfrak{S}^{(4)*}]}{\lambda_{00}}.$$

Ähnlich erhalten wir die gleichen Abschätzungen für

$$\left|\left(\frac{\partial X^*}{\partial Z}\right)_{X=Z=0}\right|, \quad \left|\left(\frac{\partial Z^*}{\partial X}\right)_{X=Z=0}\right|, \quad \left|\left(\frac{\partial Z^*}{\partial Z}\right)_{X=Z=0}\right|.$$

Da ferner

$$D^*(X, Z) = D^*(X^\dagger, Z^\dagger)\, D^\dagger(X, Z)$$

ist, so ist

$$\frac{\partial D^*(X, Z)}{\partial X} = D^\dagger(X, Z)\left[\frac{\partial D^*(X^\dagger, Z^\dagger)}{\partial X^\dagger}\frac{\partial X^\dagger}{\partial X} + \frac{\partial D^*(X^\dagger, Z^\dagger)}{\partial Z^\dagger}\frac{\partial Z^\dagger}{\partial X}\right] + D^*(X^\dagger, Z^\dagger)\frac{\partial D^\dagger(X, Z)}{\partial X},$$

$$\left[\frac{D^*(X, Z)}{\partial X}\right]_{X=Z=0}\Big| \leqq \frac{6[32\sqrt{2}\pi\mu(\mathfrak{S}^{(4)})]^3\varrho'^2}{(\sqrt{\lambda_{00}^3})} + \frac{24[32\sqrt{2}\pi\mu(\mathfrak{S}^{(4)*})]^4\varrho'^3}{\lambda_{00}^2}\frac{[32\sqrt{2}\pi\mu(\mathfrak{S}^{(4)*})]\varrho'}{\sqrt{\lambda_{00}}}.$$

In gleicher Weise leiten wir die entsprechende Ungleichung für $\left|\left[\frac{\partial D^*(X, Z)}{\partial Z}\right]_{X=Z=0}\right|$ her. Da unsere Ungleichungen für jedes $\varrho'(\varrho' > \varrho)$ gelten, so gelten sie auch für ϱ.

Eingegangen 7. Juni 1929.

Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

Herausgegeben von

K. Hensel

H. Hasse L. Schlesinger

Wissenschaftlicher Beirat

H. Brandt / M. Dehn / G. Doetsch / A. Fraenkel / O. Haupt / F. Hausdorff
E. Hellinger / G. Kowalewski / H. Rademacher / K. Reidemeister
A. Rosenthal / C. Schaefer / W. Schmeidler / F. Schottky / O. Toeplitz

Band 163

In vier Heften

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung — J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung — Georg Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.

Berlin W 10 und Leipzig

1930